

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI SCIENZE MM.FF.NN.

CORSO DI STUDI IN FISICA

Tesi Di Laurea

**STUDIO E SVILUPPO DI UN MODELLO DI
SPIN FINALIZZATO ALL'ASSET
MANAGEMENT**

Relatore: Ch.mo Prof. Attilio Stella

Laureando: Riccardo Donati

ANNO ACCADEMICO 2004-2005

Indice

INTRODUZIONE	6
1. MODELLO DI ISING	10
1.1. FORMULAZIONE HAMILTONIANA.....	10
1.2. CAMPO LOCALE	11
1.2.1. Campo magnetico esterno.....	12
1.2.2. Primi vicini.....	12
1.3. PROBABILITÀ SISTEMA A DUE STATI	13
1.4. DINAMICA DI BAGNO TERMICO	14
1.5. SOLUZIONE DI ONSAGER.....	14
1.5.1. Energia libera	15
1.5.2. Energia interna	17
1.5.3. Capacità termica.....	17
1.5.4. Magnetizzazione.....	18
1.6. FLUTTUAZIONE DISSIPAZIONE.....	18
2. MERCATI FINANZIARI	19
2.1. INTRODUZIONE	19
2.1.1. Serie storica dei prezzi	19
2.1.2. Rendimento.....	19
2.1.3. Serie storica dei rendimenti	21
2.1.4. Volatilità.....	21
2.2. DISTRIBUZIONE.....	22
2.2.1. Distribuzione Normale	22
2.2.2. Distribuzione Di Lévy.....	22
2.2.3. Esponente di stabilità.....	25
2.2.4. Rischio annualizzato	26
2.2.5. Comportamento asintotico	26
2.3. AUTOCORRELAZIONE DELLA VOLATILITÀ.....	27
3. S&P 500 E RANDOM WALK	29
3.1. PREZZI E RENDIMENTI.....	29
3.2. ESPONENTE DI STABILITÀ	31
3.2.1. S&P 500.....	31
3.2.2. Modello Random Walk.....	32
3.3. DISTRIBUZIONE.....	33
3.4. CLUSTER ED AUTOCORRELAZIONE.....	34

4.	MODELLO FINANZIARIO.....	37
4.1.	CLASSI D'INVESTITORI	37
4.1.1.	<i>Investitori tecnici, descrizione</i>	38
4.1.2.	<i>Investitori tecnici, modello</i>	39
4.1.3.	<i>Investitori fondamentalisti, modello</i>	41
4.2.	MODELLO DI MERCATO	42
4.3.	MODELLO DI SPIN	43
4.3.1.	<i>Interazione tra primi vicini</i>	43
4.3.2.	<i>Interazione antiferromagnetica</i>	44
4.3.3.	<i>Interazione con un campo esterno</i>	47
4.3.4.	<i>Dinamica di bagno termico</i>	47
5.	IMPLEMENTAZIONE	48
5.1.	CLASSE .NET FRAMEWORK	48
5.1.1.	<i>Dinamica di bagno termico</i>	49
5.1.2.	<i>Dinamica di Metropolis e Glauber</i>	49
5.2.	MATHEMATICA PACKAGES	51
6.	SIMULAZIONE MODELLO DI ISING.....	52
6.1.	GRANDEZZE TERMODINAMICHE	52
6.1.1.	<i>Magnetizzazione</i>	52
6.1.2.	<i>Energia</i>	53
6.1.3.	<i>Capacità termica</i>	54
6.1.4.	<i>Suscettività magnetica</i>	54
6.1.5.	<i>Energia verso magnetizzazione</i>	55
6.2.	DINAMICA DEI PREZZI.....	55
7.	SIMULAZIONE INTERAZIONE HAMILTONIANA	58
7.1.	GRANDEZZE TERMODINAMICHE	59
7.1.1.	<i>Magnetizzazione</i>	59
7.1.2.	<i>Energia libera verso magnetizzazione</i>	60
7.1.3.	<i>Energia</i>	61
7.1.4.	<i>Capacità termica</i>	61
7.1.5.	<i>Suscettività magnetica</i>	62
7.1.6.	<i>Energia istantanea verso mangettizzazione istantanea</i>	63
7.2.	DINAMICA DEI PREZZI.....	63
8.	SIMULAZIONE MODELLO FINANZIARIO DI BORNHOLDT	66
8.1.	COMPONENTE RANDOM WALK NULLA.....	67
8.1.1.	<i>Magnetizzazione</i>	67
8.1.2.	<i>Distribuzione dei rendimenti</i>	68

8.1.3.	<i>Stabilità</i>	71
8.1.4.	<i>Autocorrelazione e ciclicità</i>	72
8.2.	MODELLO COMPLETO (RETICOLO + RANDOM WALK).....	75
8.2.1.	<i>Distribuzione dei rendimenti</i>	76
8.2.2.	<i>Stabilità</i>	78
8.2.3.	<i>Autocorrelazione e ciclicità</i>	79
8.3.	S&P 500 SIMULATO	81
8.3.1.	<i>Prezzi e rendimenti</i>	81
8.3.2.	<i>Stabilità</i>	82
8.3.3.	<i>Distribuzione</i>	83
8.3.4.	<i>Cluster ed autocorrelazione</i>	84
9.	DIPENDENZA DALLA DINAMICA.....	86
9.1.	DINAMICA DI BAGNO TERMICO	87
9.2.	DINAMICA DI GLAUBER	88
9.3.	DINAMICA DI METROPOLIS	89
10.	CONCLUSIONI.....	91
11.	RIFERIMENTI.....	95

Introduzione

In ambito finanziario, ed in particolare nei processi di *Asset Management*¹, è sentita l'esigenza di simulare l'andamento dei prezzi degli strumenti disponibili per l'investimento (*Universo Investibile*²).

Il gestore di un fondo comune, ad esempio, non ha quasi mai a disposizione più di vent'anni di serie storica dei prezzi (circa 5000 campioni), per questo risulta statisticamente poco significativo lo studio diretto degli eventi rari, i veri responsabili della rischiosità di un investimento, tanto quanto lo sviluppo e la verifica di nuove strategie.

Se comunque s'ignorasse la questione, si potrebbe ritenere significativa la stima di rischio basata sull'osservazione di un periodo "tranquillo", oppure si potrebbe credere profittevole un modello in virtù della sola applicazione ad una fase di mercato in costante rialzo, come quella che ha caratterizzato i corsi delle più grandi borse mondiali negli anni '80 e '90.

È anche vero che, disponendo di serie storiche più lunghe, non sarebbe comunque ragionevole comparare la struttura e la dinamica dei moderni mercati con quelle di un tempo.

Per rispondere a questo tipo di esigenze, sono stati sviluppati numerosi modelli statistici, tra i quali, per citare i più famosi, i modelli *ARCH* e *GARCH*³, in grado di riprodurre alcuni comportamenti peculiari delle serie storiche empiriche, quali la distribuzione leptocurtica

¹ L'Asset Management è l'attività di gestione di un prodotto finanziario e si concretizza nello scegliere quali strumenti finanziari (azioni, obbligazioni etc.) comprare oppure vendere, in quale quantità e in che momento.

² L'Universo Investibile rappresenta l'insieme delle attività finanziarie che possono essere comprate oppure vendute nell'ambito di un determinato prodotto finanziario.

³ (Generalized) Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Questi modelli contengono un meccanismo di feed-back (Autoregressive) che utilizza i risultati passati per produrne di nuovi, distinguendo tra l'immediato passato e l'interezza dello storico (Conditional). In particolare, viene utilizzata la varianza storica per determinare la varianza dei nuovi dati generati, ottenendo una fluttuazione non costante nel tempo (Heteroscedasticity).

dei rendimenti⁴ e l'autocorrelazione della loro fluttuazione (volatilità). Detti modelli sono di tipo autoregressivo, costruiti imponendo esplicitamente la dipendenza della fluttuazione con i valori passati, e non cercano in alcun modo di mimare le componenti strutturali e le interazioni che regolano i mercati finanziari.

Abbiamo scelto a tal fine un approccio nuovo, che consiste nell'utilizzare modelli di spin per simulare il comportamento degli investitori ed il processo di formazione dei prezzi.

Come prima cosa, si sono vagliati diversi studi per verificare lo “stato dell'arte”, tra i quali, per citare i più importanti e recenti, il modello di A. Krawiecki, J. A. Holyst e D. Helbing del 2002 [10], il modello di S. Bornholdt [3] [9] sempre del 2002 ed il modello di D.A.Vangheli e G. Ardelan [13], sviluppato nel 2000. Krawiecki Holyst e Helbing hanno formulato in ‘*Volatility clustering and scaling for financial time series due to attractor bubbling*’ un modello di spin 1/2 nel quale sono state introdotte diverse variabili casuali per giustificare le interazioni tra gli spin (“fluctuating interaction network”) e l'interazione con l'ambiente (“fluctuating environment”). Tale metodo è sembrato molto artificioso, richiedendo un notevole *tuning* per garantire i giusti risultati. Vangeli ed Ardelan hanno proposto in ‘*The Ising Like Statistical Models for Studying the Dynamics of the Financial Stock Markets*’ un modello di spin 3/2 di tipo Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -H \sum_i s_i - J \sum_{i,j} s_i s_j - D \sum_i s_i^2 - K \sum_{i,j} s_i^2 s_j^2$$

regolato da due meccanismi d'ordinamento caratterizzati dai parametri d'ordine $M = \langle s_i \rangle$ e $Q = \langle s_i^2 \rangle$. Pur essendo quest'ultimo caratterizzato dalla formulazione fisica più elegante, manca tuttavia di un'interpretazione finanziaria diretta. Per questo si è deciso, alla fine, di seguire il lavoro di S. Bornholdt, ‘*Expectation bubbles in a spin model of markets: intermittency from frustration across scales*’ [3] in quanto le interazioni che descrive nella forma di campo locale su di un modello di spin 1/2

$$h_k = J \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j - 2 \frac{\gamma}{N} s_k \left| \sum_{i \neq k} s_i \right|$$

⁴ Per *rendimenti* possiamo pensare alla variazione percentuale giornaliera di un'attività finanziaria.

hanno un immediato riscontro con la struttura del mercato ed il comportamento degli investitori.

Articolazione dei capitoli.

Il lavoro comincia con tre capitoli introduttivi su temi generali di fisica e di finanza. Il primo richiama il *modello di Ising*, il campo locale e la dinamica di *bagno termico* (*Heat Bath Dynamics*). Il successivo approfondisce argomenti finanziari legati allo studio delle serie storiche: il *rendimento* e la *volatilità*, la distribuzione di Lévy, l'*autocorrelazione*. Si è quindi dedicato l'intero capitolo 3 all'applicazione di questi argomenti allo studio della serie storica di un importante indice di borsa, l'S&P 500, che utilizzeremo come riferimento per confrontare i risultati delle simulazioni.

Il capitolo 4 è centrale, in quanto descrive il modello finanziario dal punto di vista teorico. Seguendo le linee tracciate da T. Kaizoji, S. Bornholdt e Y. Fujiwara in '*Dynamics of price and trading volume in a spin model of stock markets with heterogeneous agents*' [9], vengono identificate due macro classi d'investitori: gli *investitori tecnici* e gli *investitori fondamentalisti* (4.1). Quindi viene approfondito il processo di formazione dei prezzi (4.2), al quale concorre il comportamento degli *investitori fondamentalisti*, ricondotto ad un cammino *Random Walk* (*moto browniano*), ed il comportamento degli *investitori tecnici*, descritto da un modello di spin (4.3). La componente *Random Walk*, diversamente dal lavoro citato, è stata esplicitamente definita e tenuta in considerazione, permettendo di giustificare alcune relazioni di scala altrimenti non riproducibili.

Il modello di spin (4.3) è il punto di arrivo di un percorso di studio che si è ritenuto utile riproporre nei capitoli 6 ed 7, in quanto riteniamo costituisca una naturale premessa al modello finale.

Dopo aver descritto nel capitolo 5 l'implementazione del software necessario, abbiamo analizzato, nel capitolo 6, i risultati delle simulazioni sul *modello di Ising* tradizionale in due dimensioni. La serie storica dei prezzi ottenuta non manifesta i comportamenti che si cercavano: al di sopra della temperatura critica i fenomeni aggregativi non fanno sentire il loro effetto, mentre al di sotto portano ad una magnetizzazione spontanea, "congelando" il sistema in uno stato definito.

E' stato quindi sommato all'Hamiltoniana un termine d'interazione antiferromagnetica globale, con l'intento di permettere, al di sotto della temperatura critica, lo sviluppo di fenomeni aggregativi che non facessero tuttavia collassare il sistema. In effetti si è riscontrato, come riportato nel capitolo 7, lo sviluppo di cluster di spin, pur mantenendo nulla la magnetizzazione globale media, ma il raggiungimento di uno stato d'equilibrio stabile porta a generare prezzi simili a quelli ottenuti dal *modello di Ising*.

Riscrivendo il sistema precedente tramite un campo locale, è stato infine modificato il segno dell'interazione antiferromagnetica in modo da risultare sempre opposto non tanto alla magnetizzazione globale, quanto allo spin locale. Viene così definito il modello proposto da Stefan Bornholdt [9], che vede agire due interazioni antagoniste: quella tra primi vicini, di tipo aggregativo, e quella antiferromagnetica, la quale agevola lo spin flipping al crescere della magnetizzazione. La dinamica risultante, studiata nel capitolo 8, evidenzia la formazione di stati metastabili caratterizzati da cluster di spin e magnetizzazione media globale nulla.

Il paragrafo 8.2 riporta i risultati ottenuti simulando il modello finanziario completo, comprensivo della componente *Random Walk*.

Al paragrafo 8.3 vengono scelte la temperatura e la forza dell'interazione antiferromagnetica in modo da riprodurre i comportamenti tipici della serie storica dei prezzi dell'indice S&P 500, ottenendo grandezze in ottimo accordo con le rilevazioni sperimentali viste al capitolo 3.

Per concludere, il capitolo 9 verifica che la scelta dell'algoritmo dinamico del modello di spin non rappresenti un elemento di criticità.

1. Modello di Ising

In questo capitolo richiamiamo brevemente la formulazione del *modello di Ising*, in modo da fissare la terminologia.

1.1. Formulazione Hamiltoniana

Consideriamo un reticolo di spin bidimensionale $\{s_i\}_{i=1, \dots, N}$, $s_i = \pm 1$, nel quale agiscono le interazioni:

1. *interazione locale tra primi vicini* regolata da un parametro $J > 0$ (interazione ferromagnetica)

$$\mathcal{H}_{\text{primi vicini}} = -J \sum_{i,j \in \langle \rangle} s_i s_j.$$

2. *interazione con un campo magnetico esterno* H

$$\mathcal{H}_{\text{campo esterno}} = -H \sum_{i=1}^N s_i$$

$\langle \rangle$ indica l'insieme di coppie di primi vicini senza ripetizioni. L'Hamiltoniana del sistema è la somma delle precedenti. Per effetto dell'interazione tra primi vicini, l'energia scende mano a mano che gli spin si orientano come i loro vicini; per effetto dell'interazione con il campo esterno, l'energia scende mano a mano che si orientano come il campo magnetico esterno.

Il reticolo sia a contatto con una *riserva di calore* a temperatura T (*ensamble canonico*). La *funzione di partizione* è

$$Q = \sum_{s_1 = \pm 1, \dots, s_N = \pm 1} e^{-\beta \mathcal{H}(s_1, \dots, s_N)} \quad \beta = \frac{1}{k T}$$

dove k è la costante di Boltzmann.

La probabilità di trovare il sistema nello stato s_1, \dots, s_N segue la distribuzione di Boltzmann

$$\wp(s_1, \dots, s_N) = \frac{1}{Q} e^{-\beta \mathcal{H}(s_1, \dots, s_N)}$$

v. ad esempio K.Huang, ‘*Statistical Mechanics*’ [6].

1.2. Campo locale

L’introduzione di un campo locale agente sul k-esimo spin è richiesto per il lavoro che faremo in quanto permette di:

- sviluppare un modello dinamico basato sul campo locale;
- comprendere la natura delle interazioni;
- introdurre nuove interazioni.

Seguendo D. Chandler, ‘*Statistical Mechanics*’ [4] il campo locale h_i sullo spin s_i in un dominio continuo, è tale che

$$h = (h_1, \dots, h_N) \equiv -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = -\frac{\partial \mathcal{H}(s_1, \dots, s_N)}{\partial s_1, \dots, \partial s_N} = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s_N} \right);$$

per $s_i = \pm 1$ diviene

$$h_k = -\frac{\Delta \mathcal{H}}{\Delta s_k}.$$

Determiniamo dunque il campo locale per l’Hamiltoniana 1.1, separando la componente d’interazione tra primi vicini da quella del campo magnetico esterno. Il calcolo si svolge considerando la differenza di energia generata dal flip $s_k \rightarrow -s_k$ e confrontandola con la definizione di campo locale $\Delta \mathcal{H} = -h_k \Delta s_k$.

1.2.1. Campo magnetico esterno

Si riscrive l'Hamiltoniana relativa al campo esterno tenendo separato il k-esimo spin

$$\mathcal{H} = -H \sum_{i=1}^N s_i = -H \left(\sum_{i=1}^N s_i + s_k \right)$$

Il flip $s_k \rightarrow s_k'$ comporta

$$\mathcal{H}' = -H \left(\sum_{i=1}^N s_i + s_k' \right)$$

e dunque

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H} &= -H \left(\sum_{i=1}^N s_i + s_k' \right) + H \left(\sum_{i=1}^N s_i + s_k \right) = \\ &= -H (s_k' - s_k) = -H \Delta s_k \end{aligned}$$

dal quale, per confronto, segue

$$h_{H k} = H.$$

Come atteso, il campo magnetico esterno agisce localmente come se lo spin k-esimo fosse isolato.

1.2.2. Primi vicini

Analogamente, l'Hamiltoniana relativa all'interazione tra primi vicini si può scrivere

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i,j \in \langle \rangle} s_i s_j = -J \left(\sum_{i,j \in \langle \rangle / (k, \langle k \rangle)} s_i s_j + s_k \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j \right)$$

nella quale $\langle k \rangle$ indica l'insieme di primi vicini di k.

Il flip $s_k \rightarrow s_k'$ comporta

$$\mathcal{H}' = -J \left(\sum_{(i,j) \in \langle k, \langle k \rangle \rangle} s_i s_j + s_k' \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j \right)$$

e dunque

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H} &= -J \left(\sum_{(i,j) \in \langle k, \langle k \rangle \rangle} s_i s_j + s_k' \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j \right) + J \left(\sum_{(i,j) \in \langle k, \langle k \rangle \rangle} s_i s_j + s_k \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j \right) \\ &= -J s_k' \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j + J s_k \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j = -J \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j \Delta s_k \end{aligned}$$

dal quale, per confronto, segue

$$h_{J,k} = J \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j$$

Il campo locale agente sullo spin k-esimo dovuto ai primi vicini è la somma dello spin dei primi vicini stessi pesata con un coefficiente J.

1.3. Probabilità sistema a due stati

Si consideri un sistema a due stati $s = \pm 1$ a contatto con una *riserva di calore* a temperatura T. La *funzione di partizione* è

$$O = e^{-\beta \mathcal{H}(+1)} + e^{-\beta \mathcal{H}(-1)}$$

la probabilità di trovare il sistema in $s = +1$

$$\wp(+1) = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}(+1)}}{e^{-\beta \mathcal{H}(+1)} + e^{-\beta \mathcal{H}(-1)}} = \frac{1}{1 + e^{\beta(\mathcal{H}(+1) - \mathcal{H}(-1))}}$$

Detto $\Delta \mathcal{H}_{-1 \rightarrow +1} = \mathcal{H}(+1) - \mathcal{H}(-1)$ si ha

$$\wp(+1) = f(\Delta \mathcal{H}_{-1 \rightarrow +1})$$

definita la funzione di Fermi

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\beta x}}.$$

1.4. Dinamica di bagno termico

La dinamica di *bagno termico* (*heat bath algorithm*, v. Itzykson, ‘*Statistical Field Theory*’ [8] al capitolo “Numerical Simulations”) è regolata per ogni spin da $\wp(+1)$ come definito in 1.3. Ricordando da 1.2 che la differenza di energia per il flip $s_k = 1 \rightarrow s_k' = -1$ è $\Delta\mathcal{H} = -h_k \Delta s_k = -2h_k$ la probabilità di avere il k-esimo spin nello stato +1 diventa

$$\wp[s_k(t+1) = +1] = \frac{1}{1 + e^{-2\beta h_k}}.$$

L’evoluzione del sistema nel tempo si guadagna impostando lo stato dello spin k-esimo secondo tale probabilità e ripetendo per tutti gli spin del reticolo il procedimento, come se si ponesse un solo spin alla volta a contatto con una *riserva di calore* a temperatura definita T, “congelando” tutti i rimanenti.

La dinamica di *bagno termico* è considerata la dinamica “naturale” del *modello di Ising* (ed in generale di ogni modello di spin), v. Bar-Yam, ‘*Dynamics of Complex Systems*’ [1] al capitolo “Statistical Fields”, nel quale è chiamata *Glauber Dynamics*, ed è utilizzata comunemente nelle applicazioni “interdisciplinari” quali le reti neurali, la genetica (*Protein Folding*), le scienze sociali.

1.5. Soluzione di Onsager

La *funzione di partizione* per il *modello di Ising* in due dimensioni è stata calcolata analiticamente da Onsager nel 1944, costituendo uno dei pilastri della fisica teorica del XX secolo (v. ad esempio Bhattacharjee, ‘*Fifty Years of the Exact solution of the Two-dimensional Ising Model by Onsager*’ [2]).

Dalla *funzione di partizione* discendono le principali grandezze termodinamiche. Riportiamo i risultati più importanti, che useremo in seguito per verificare i risultati delle simulazioni sul *modello di Ising*, seguendo K. Huang, ‘*Statistical Mechanics*’ [6].

1.5.1. Energia libera

$$A = -\frac{1}{\beta} \log \zeta$$

$$\beta \frac{A(\beta, J)}{N} = -\log(2 \cosh(2\beta J)) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\phi \operatorname{Log} \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\cosh(2\beta J) \coth(2\beta J)} \right)^2 \sin^2 \phi} \right)$$

Dette

$$\kappa = \frac{2 \sinh(2\beta J)}{\cosh^2(2\beta J)},$$

$$\kappa' = 2 \tanh^2(2\beta J) - 1$$

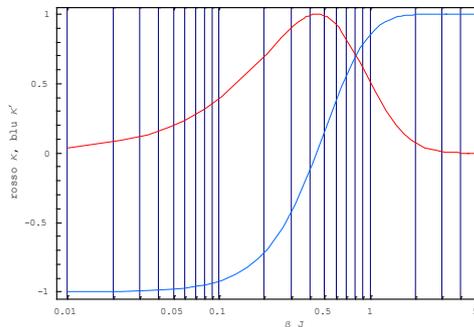


Figura 1-1: andamento di κ in rosso, di κ' in azzurro, calcolati tramite Mathematica®.

richiamando l'integrale ellittico completo di prima specie

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \phi}} d\phi$$

e l'integrale ellittico completo di seconda specie

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \sin^2 \phi} d\phi$$

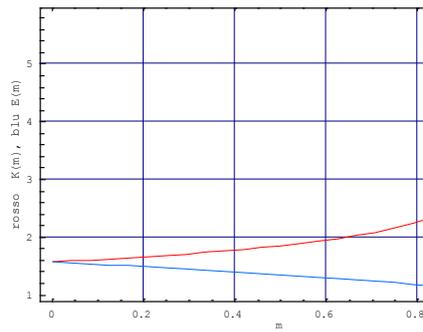


Figura 1-2: andamento di $K(m)$ in rosso, di $E(m)$ in azzurro, calcolati tramite Mathematica®.

si definiscono quindi

$$K_1(\kappa) = K(\kappa^2)$$

$$E_1(\kappa) = E(\kappa^2)$$

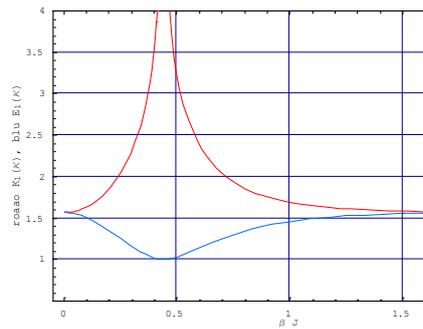


Figura 1-3: andamento di $K_1(\kappa)$ in rosso, di $E_1(\kappa)$ in azzurro, calcolati tramite Mathematica®.

tramite le quali si possono esprimere in modo esplicito le rimanenti.

$K_1(\kappa)$ è divergente per $\kappa \rightarrow 1$, cioè per

$$\frac{2 \sinh(2\beta J)}{\cosh^2(2\beta J)} =$$

ovvero per $T_c J \sim 2.269185314\dots$, dove T_c è detta “temperatura critica”.

1.5.2. Energia interna

$$U = -kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{A}{kT} \right)$$

$$\frac{U(\beta, J)}{N} = -J \coth(2\beta J) \left(1 + \frac{2}{\pi} \kappa' K_1(\kappa) \right)$$

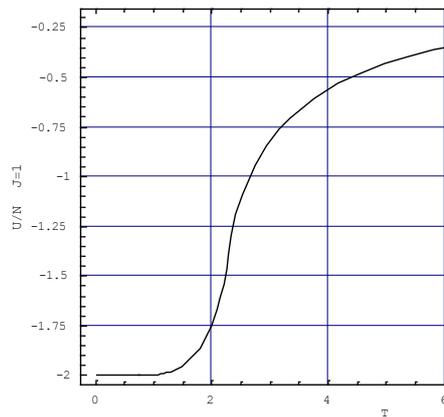


Figura 1-4: andamento di U/N per $J=1$, calcolato tramite Mathematica®.

1.5.3. Capacità termica

$$C = \frac{\partial U}{\partial T}$$

$$\frac{C(\beta, J)}{N} = \frac{2}{\pi} (\beta J \coth(2\beta J))^2 \left(2K_1(\kappa) - 2E_1(\kappa) - (1 - \kappa') \left(\frac{\pi}{2} + \kappa' K_1(\kappa) \right) \right)$$

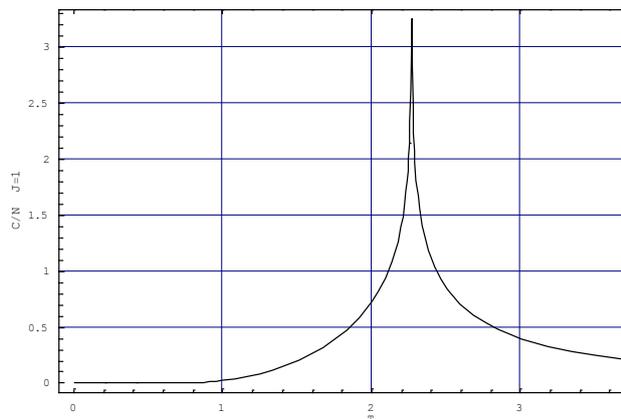


Figura 1-5: andamento di C/N per $J=1$, calcolato tramite Mathematica®.

1.5.4. Magnetizzazione

$$M = - \frac{\partial}{\partial H} (\beta A)$$

$$\frac{M(\beta, J)}{N} = \begin{cases} \frac{1}{8} [1 - (\sinh 2\beta J)^{-4}] & \text{if } T < T_C \\ 0 & \text{if } T \geq T_C \end{cases} .$$

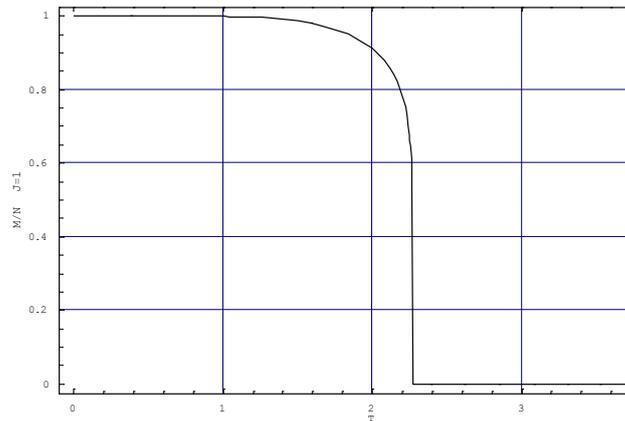


Figura 1-6: andamento di M/N per J=1, calcolato tramite Mathematica®.

1.6. Fluttuazione dissipazione

Il teorema di fluttuazione-dissipazione, v. per esempio K. Huang, ‘*Statistical Mechanics*’ [6], consente di mettere in relazione la capacità termica con le fluttuazioni dell’energia istantanea

$$C = \frac{1}{kT^2} (\langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2)$$

e la suscettività magnetica con le fluttuazioni della magnetizzazione istantanea m

$$\chi = \frac{1}{kT} (\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2) .$$

2. Mercati finanziari

2.1. Introduzione

2.1.1. Serie storica dei prezzi

Il prezzo di un'attività finanziaria AF quotata in un mercato è determinato dall'incontro tra la domanda e l'offerta. Gli investitori che desiderano comperare AF inoltrano nel mercato una proposta d'acquisto (*denaro*) fissando il prezzo limite al di sopra del quale non sono disposti a concludere la transazione. Analogamente, gli investitori che desiderano vendere AF in loro possesso, inoltrano nel mercato una proposta (*lettera*) limitando il prezzo ad di sotto del quale non desiderano procedere. L'insieme delle proposte di acquisto e vendita formano, istante per istante, il *book* di AF. Nel momento in cui un acquirente è disposto ad incontrare la miglior lettera, oppure un venditore ad incontrare il miglior denaro, avviene la transazione (o scambio).

E' possibile campionare, ad intervalli di tempo prefissati ΔT , il prezzo dell'ultima transazione, ottenendo una serie storica $\{P_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ dove t indica il numero d'ordine del campione. Ad esempio, campionando l'ultimo prezzo disponibile in chiusura di ogni giornata di contrattazione, si ottiene una *serie storica giornaliera* dei prezzi di AF.

Affinché la serie storica così raccolta sia significativa per gli studi che seguono, è necessario che il numero di transazioni tra due campionature sia elevato (AF si dice allora *liquida* su quel orizzonte temporale).

2.1.2. Rendimento

Lo scopo di ogni investitore è quello di trarre profitto dalle proprie azioni sul mercato. Per questo è naturale introdurre una misura del rendimento conseguibile acquistando AF al prezzo p e vendendola al prezzo p' .

La più familiare di queste misure è il *rendimento percentuale*

$$r_{12} = 100 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right)$$

Non si tratta tuttavia del miglior modo per quantificare guadagni o perdite. Supponiamo che un investitore realizzi dapprima una perdita del 50% e poi un guadagno del 50%: complessivamente l'investitore sarebbe ancora in perdita del 25%.

Una misura del rendimento in grado di superare questo limite è il *rendimento logaritmico*

$$r_{12} = \log \frac{P_2}{P_1}$$

in quanto verifica

$$\begin{aligned} r_{12} + r_{23} &= \log \frac{P_2}{P_1} + \log \frac{P_3}{P_2} = \log \frac{P_2}{P_1} \frac{P_3}{P_2} = \log \frac{P_3}{P_1} = \\ &= r_{13} \end{aligned}$$

Inoltre, se il *rendimento percentuale* tende a zero, il *rendimento logaritmico* tende a quello percentuale (a meno di un fattore 100):

$$\begin{aligned} r_{\log 12} &= \log \frac{P_2}{P_1} = \log \left(1 + \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \right) = 1 + \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) + o \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{100} (r_{\%12} + o(r_{\%12})) \end{aligned}$$

Definendo il *log-prezzo*

$$Z = \log P$$

il *rendimento logaritmico* si può scrivere come la differenza tra i log-prezzi

$$r_{12} = \log \frac{P_2}{P_1} = \log P_2 - \log P_1 = Z_2 - Z_1.$$

Incidentalmente, è questa la ragione per la quale si usa disegnare il grafico dei prezzi di strumenti finanziari utilizzando la scala logaritmica.

2.1.3. Serie storica dei rendimenti

Data la serie storica dei prezzi di AF $\{P_t \mid t \in \mathbb{N}\}$, è possibile studiare la *serie storica dei rendimenti di periodo T* considerando il rendimento tra il tempo $t-T$ ed il tempo t

$$r_{t-T, t} = \log \frac{P_t}{P_{t-T}}.$$

Se, come faremo sempre, si utilizzano *rendimenti logaritmici*, la precedente diviene

$$r_{t-T, t} = \log \frac{P_t}{P_{t-T}}.$$

$r_{t-T, t}$ è chiamata brevemente la *serie dei rendimenti*, o semplicemente *rendimenti*. Se P è la serie storica giornaliera dei prezzi, r è detta la serie dei *rendimenti giornalieri*.

2.1.4. Volatilità

La *volatilità* è una grandezza che esprime l'ampiezza delle fluttuazioni del prezzo in un dato orizzonte temporale ed è correlata al rischio associato all'attività finanziaria.

Definito un intervallo di campionatura e conseguentemente la serie storica dei prezzi

$\{P_t \mid t \in \mathbb{N}\}$, è possibile misurare la *volatilità* sull'orizzonte temporale della campionatura calcolando il valore assoluto dei *rendimenti logaritmici*:

$$v_t = |r_{t-1, t}| = \left| \log \frac{P_t}{P_{t-1}} \right|.$$

La *volatilità media* nel periodo $[t_1, t_2]$ è la media delle *volatilità* in quel periodo.

In seguito useremo sempre questa semplice definizione, anche se sono possibili, e frequentemente utilizzate, diverse altre misure, quali lo scarto quadratico medio della serie storica dei *rendimenti* di periodo T.

2.2. Distribuzione

Considerando l'insieme dei *rendimenti* di periodo T di AF come derivati da una variabile casuale, è possibile studiare la densità di probabilità $p(r)$, ovvero la *distribuzione dei rendimenti*.

2.2.1. Distribuzione Normale

Il modello più comunemente impiegato per descrivere l'andamento della serie storica dei prezzi di un'attività finanziaria è il *moto browniano*, o *Random Walk*, caratterizzato da una distribuzione dei *rendimenti* Gaussiana (Normale). Da questo nascono i principali modelli di prezzo (il modello di Black-Scholes, utilizzato quasi universalmente per l'analisi di *strumenti derivati*) e di *ottimizzazione di portafoglio* (dal modello di Markovitz alle moderne teorie di portafoglio).

Tuttavia l'osservazione empirica della distribuzione dei *rendimenti* di un gran numero di attività finanziarie non concorda con tale risultato, in quanto evidenzia una forma leptocurtica, caratterizzata da code spesse (*fat tails*). L'utilizzo di un modello normale porta dunque ad una sistematica sottostima dei rischi connessi all'investimento su strumenti finanziari.

2.2.2. Distribuzione Di Lévy

E' naturale cercare distribuzioni più aderenti alla fenomenologia tra quelle che mantengono la stessa forma al variare dell'orizzonte temporale (non ci sono orizzonti temporali "più convenienti") e che siano simmetriche a media nulla (non sono privilegiati né i compratori, né i venditori).

L'invarianza in forma sotto cambiamenti di scala temporale è equivalente a

$\forall T$ la distribuzione di $\{r_t\}_1$ ha la stessa forma della distribuzione di $\{r_t\}_T$.

Se i rendimenti soddisfano a $r_{1,2} + r_{2,3} = r_{1,3}$, come verificato per i rendimenti logaritmici, si ha

$$r_{t,T} = r_{t-T,t} = r_{t-T,t-T+1} + \dots + r_{t-1,t} = r_{t-T+1} + \dots + r_{t-1}$$

Dunque l'invarianza di scala richiesta è garantita se la distribuzione è invariante in forma per addizione, ovvero se la distribuzione è stabile. La classe di distribuzioni stabili è stata completamente determinata dai matematici P. Lévy e A.Ya.Khintchine negli anni '20. Limitandoci alla sottoclasse di distribuzioni simmetriche a media nulla, la funzione caratteristica, ovvero la trasformata di Fourier della densità di probabilità, è

$$\varphi_\alpha(z) = e^{-a|z|^\alpha}$$

dove il parametro $\alpha > 0$ è detto *esponente di stabilità*, mentre $a > 0$ è un *fattore di scala*, v. G. Vasconcelos, 'A Guided Walk Down Wall Street: an Introduction to Econophysics' [14]. La densità di probabilità è dunque la trasformata inversa

$$\begin{aligned} L_\alpha(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|z|^\alpha} e^{-irz} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-a|z|^\alpha} e^{-irz} dz + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a|z|^\alpha} e^{-irz} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a z^\alpha} e^{+irz} dz + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a z^\alpha} e^{-irz} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a z^\alpha} 2 \frac{e^{+irz} + e^{-irz}}{2} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a z^\alpha} \cos(rz) dz \end{aligned}$$

non analiticamente esprimibile se non che per $\alpha=1$, ottenendo la distribuzione di Cauchy

$$L_1(r) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + r^2}$$

e per $\alpha=2$, ottenendo la distribuzione di Gauss

$$L_2(r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{r^2}{4a}}$$

nella quale la varianza $\sigma^2 = 2c$

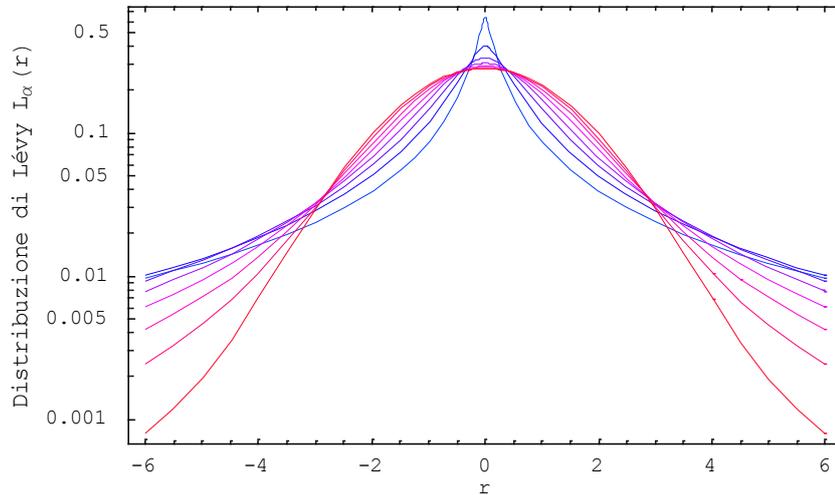


Figura 2-1: distribuzione di Lévy simmetrica: alfa=2 in rosso, alfa=0.5 in azzurro; calcolo tramite Mathematica®.

La somma di T variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite segue una distribuzione la cui funzione caratteristica è il prodotto delle funzioni caratteristiche. Per questo sommando T variabili casuali indipendenti distribuite secondo la medesima distribuzione di Lévy si ottiene la funzione caratteristica

$$\varphi_{\alpha}(z) = \left(e^{-a|z|^{\alpha}} \right)^T = e^{-aT|z|^{\alpha}} = e^{-a|T^{1/\alpha}z|^{\alpha}}$$

la cui densità di probabilità è la trasformata inversa

$$L_{\alpha}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|T^{1/\alpha}z|^{\alpha}} e^{-irz} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|^{\alpha}} e^{-i(T^{-1/\alpha}r)x} T^{-1/\alpha} dx =$$

$$T^{-1/\alpha} L_{\alpha}(T^{-1/\alpha}r) = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{T}} L_{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[\alpha]{T}}r\right)$$

verificandone la stabilità. La distribuzione di Lévy può essere quindi utilizzata per modellare la distribuzione dei rendimenti, in quanto è stata verificata l'invarianza in forma sotto cambiamenti di scala temporale.

2.2.3. Esponente di stabilità

Calcolando la relazione di scala precedente per $r=0$ (il massimo delle distribuzioni) si ha

$$L_{\alpha}(0) = T^{-1/\alpha} L_{\alpha}(0)$$

$$\log L_{\alpha}(0) = \log(T^{-1/\alpha}) + \log(L_{\alpha}(0))$$

$$\log L_{\alpha}(0) = -1/\alpha \log T + \log(L_{\alpha}(0)) ;$$

se definiamo

$$x = \log T , y = \log L_{\alpha}(0)$$

la relazione diventa

$$y = -\frac{1}{\alpha} x + \log(L_{\alpha}(0)) .$$

Questa permette di misurare l'*esponente di stabilità* di una serie storica sperimentale: la regressione lineare di y verso x porge un coefficiente angolare m tale che

$$\alpha = -\frac{1}{m} .$$

Naturalmente y è il logaritmo del massimo della distribuzione dei *rendimenti* di periodo T normalizzata.

Seguendo tale metodo, si è misurato l'*esponente di stabilità* per diverse attività finanziarie quotate, rilevando valori strettamente inferiori a 2.

2.2.4. Rischio annualizzato

La relazione di scala, assumendo $\alpha=2$ (distribuzione normale)

$$L_{\frac{r}{T}} = L_2\left(\frac{1}{\sqrt{T}} r\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{r^2}{2(\sqrt{T} \sigma)^2}}$$

è universalmente utilizzata per *annualizzare* lo scarto quadratico medio dei *rendimenti* calcolati su base settimanale o mensile:

$$\sigma_{\text{annualizzato}} = \sqrt{12} \sigma_{\text{mensile}} = \sqrt{52} \sigma_{\text{settimanale}}.$$

Poiché α è sperimentalmente inferiore a 2, si conclude che, ancora una volta, il rischio è sottostimato sistematicamente. La relazione corretta nel presente contesto è

$$\sigma_{\text{annualizzato}} = \sqrt[\alpha]{12} \sigma_{\text{mensile}} = \sqrt[\alpha]{52} \sigma_{\text{settimanale}}.$$

2.2.5. Comportamento asintotico

E' possibile dimostrare che per $|r| \rightarrow \infty$ e $\alpha < 2$ la distribuzione di Lévy tende a zero seguendo una legge di potenza

$$L_{\alpha}(r) \rightarrow \frac{C_{\alpha}}{|r|^{\alpha+1}}$$

e non esponenzialmente come per $\alpha=2$. Storicamente, è stato Mandelbrot nel 1963 a mettere in discussione il comportamento normale verificando che la distribuzione dei *rendimenti* dei prezzi del cotone non seguiva un andamento esponenziale, decadendo secondo una legge di potenza.

Naturalmente la varianza della distribuzione è infinita, per alfa inferiore a due. Lo stesso Mandelbrot [12] si domanda se la varianza dei *rendimenti* dei mercati finanziari sia infinita, ed il problema è tutt'oggi aperto. Si potrebbe infatti vedere che, all'aumentare del numero di

campioni dei *rendimenti*, la varianza misurata empiricamente non tende a stabilizzarsi come atteso. In ogni modo utilizzeremo la distribuzione di Lévy solo per verificare il comportamento centrale, tralasciando l'andamento delle code più lontane.

2.3. Autocorrelazione della volatilità

Data una serie storica s_t , si definisce l'*autocorrelazione* di ritardo L

$$A_L \equiv \text{Corr}(s_t, s_{t-L}) = \frac{\sum_t (s_t - \bar{s})(s_{t-L} - \bar{s})}{\sqrt{\sum_t (s_t - \bar{s})^2 \sum_t (s_{t-L} - \bar{s})^2}}$$

Lo studio di numerose AF ha dimostrato che, benché la serie storica dei *rendimenti* non presenti *autocorrelazione*, la serie storica delle *volatilità* manifesti un andamento dell'*autocorrelazione* di tipo esponenziale

$$A_L = A_0 e^{-\gamma L}$$

dove γ è l'*esponente di decadimento*. Naturalmente la precedente non vale per $L=0$, per il quale l'*autocorrelazione* è unitaria.

Una regressione lineare tra il logaritmo delle autocorrelazioni ed i ritardi, condotta escludendo $L=0$,

$$v = \log A_L, \quad x = L, \quad v = m x + c$$

permette di stimare l'*esponente di decadimento* γ ed il *coefficiente di autocorrelazione* A_0

$$\log A_L = \log A_0 - \gamma L$$

$$\gamma = -m$$

$$A_0 = e^c.$$

Il fenomeno descritto ha origine dal così detto raggruppamento in grappoli (*cluster*) della volatilità: a periodi nei quali si registrano ampie variazioni di prezzi seguono periodi caratterizzati da variazioni molto minori. Questa evidenza non è naturalmente riprodotta dal modello *Random Walk*, e l'utilizzo di modelli che da questo discendono porta ancora una volta ad una sottostima del rischio sostenuto.

3. S&P 500 e Random Walk

A titolo d'esempio e per concretizzare quanto visto nel capitolo precedente, si studia l'andamento della serie storica dei prezzi dell'indice S&P 500 (titoli statunitensi di maggiore capitalizzazione), uno degli indici azionari più importanti e più seguiti dagli investitori di tutto il mondo. Si confronteranno i risultati con la serie storica generata da un modello *Random Walk*.

3.1. Prezzi e rendimenti

Consideriamo la serie storica dei prezzi dell'indice S&P 500 $P(t)$ registrati ad ogni chiusura di sessione giornaliera dal 4/1/1965 al 15/8/2003

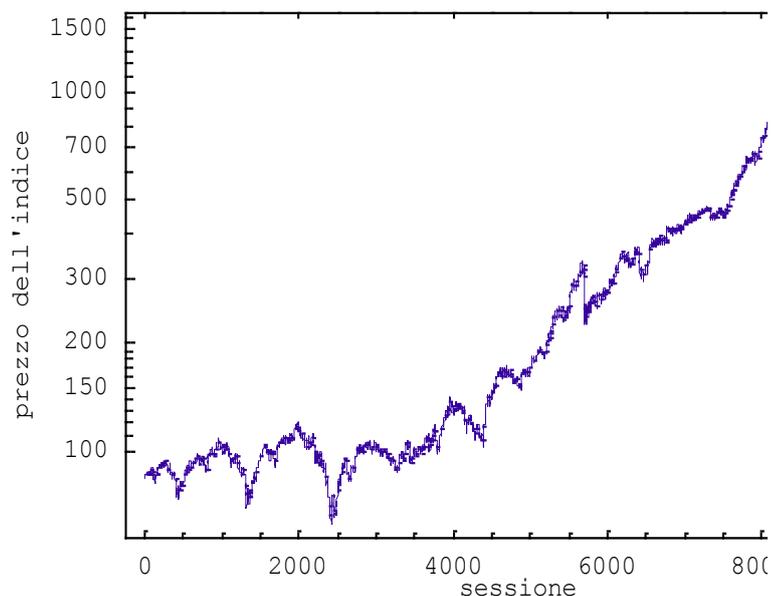


Figura 3-1: grafico in scala logaritmica dei prezzi dell'indice S&P 500 rilevati in chiusura di ogni sessione.

calcolando i log-prezzi e la serie storica dei *rendimenti logaritmici* di periodo $T=1$, pari a $\log P(t) - \log P(t-1)$, detti *rendimenti giornalieri*, o brevemente *rendimenti*, come abbiamo visto al paragrafo 2.1.3.

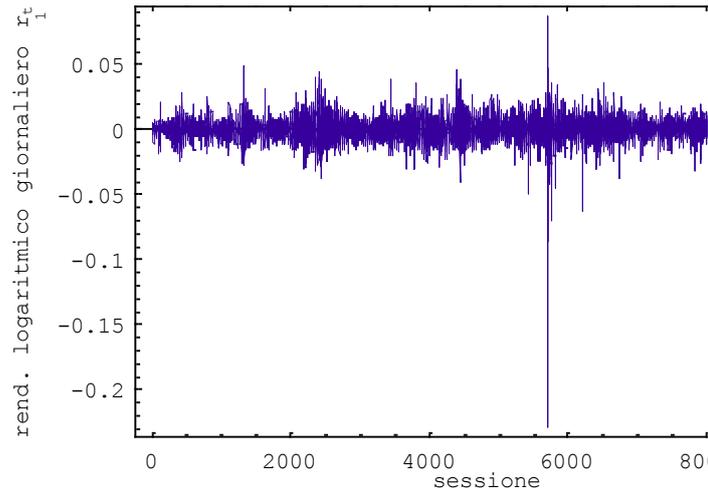


Figura 3-2: serie storica dei *rendimenti* dell'indice S&P 500.

La statistica descrittiva della serie dei *rendimenti* è

Campioni	Media	Dev. St.	Asimmetria	Curtosi
9706	$2.57 \cdot 10^{-4} \pm 9.8 \cdot 10^{-5}$	$9.732 \cdot 10^{-3} \pm 6.9 \cdot 10^{-5}$	$-1.412 \pm 2.4 \cdot 10^{-2}$	$38.94 \pm 4.97 \cdot 10^{-2}$

Per confronto, viene generata stocasticamente una serie storica di *rendimenti* indipendenti ed identicamente distribuiti, caratterizzati da una probabilità normale avente la stessa media e la stessa deviazione standard rilevate per l'indice S&P 500

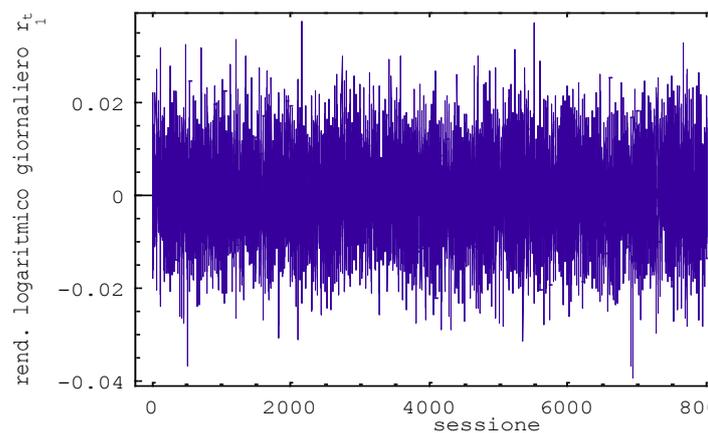


Figura 3-3: serie storica dei *rendimenti* generati dal modello *Random Walk*.

Misuriamo i momenti centrali dei dati così prodotti:

Campioni	Media	Dev. St.	Asimmetria	Curtosi
9706	$2.61 \cdot 10^{-4} \pm 9.8 \cdot 10^{-5}$	$9.677 \cdot 10^{-3} \pm 6.9 \cdot 10^{-5}$	$-0.007 \pm 2.4 \cdot 10^{-2}$	$3.032 \pm 4.97 \cdot 10^{-2}$

Calcolando infine l'esponenziale della somma cumulativa, è stato ricostruito l'andamento dei prezzi del modello *Random Walk*.

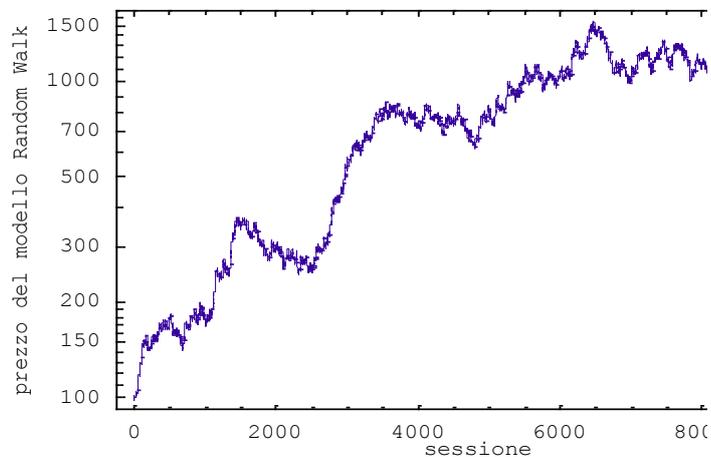


Figura 3-4: grafico in scala logaritmica dei prezzi generati dal modello *Random Walk*.

Come si può vedere, la distribuzione dei *rendimenti* dell'indice S&P 500 è leptocurtica, presentando curtosi maggiore di 3 (curtosi della distribuzione normale).

3.2. Esponente di stabilità

3.2.1. S&P 500

Stimiamo l'*esponente di stabilità* di Lévy per l'indice S&P 500 così come indicato nel paragrafo 2.2.3, ovvero calcolando il coefficiente angolare m della regressione tra il logaritmo del massimo della densità di distribuzione dei *rendimenti* di periodo T ed il logaritmo di T , per T che varia tra 1 e 40 periodi.

Definendo infatti $x = \log T$, $y = \log L_{\alpha}(0)$, la legge di scala $L_{\alpha}(0) = T^{-1/\alpha} L_{\alpha}(0)$ diviene

$$y = -\frac{1}{\alpha} x + \log(L_{\alpha}(0))$$

permettendo di ottenere l'*esponente di stabilità* con il relativo errore

$$\alpha = -\frac{1}{m}, \quad \sigma_{\alpha} = \frac{1}{m^2} \sigma_n.$$

La regressione lineare sui dati sperimentali di y verso x porge

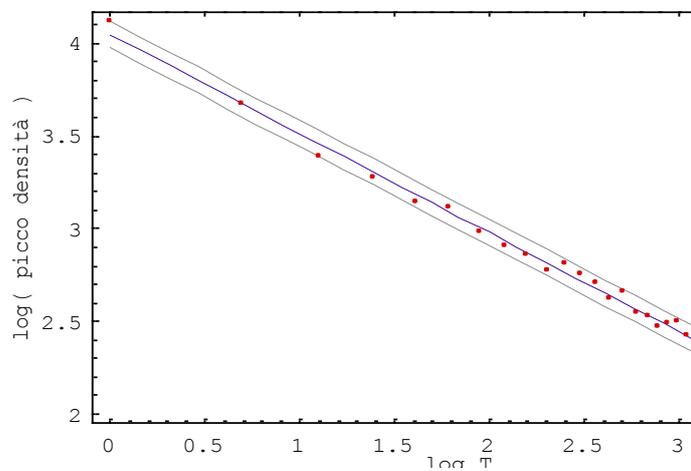


Figura 3-5: S&P 500, *esponente di stabilità*. Regressione lineare tra il logaritmo del massimo della distribuzione dei *rendimenti* di periodo T ed il logaritmo di T . I dati sperimentali sono indicati in rosso, la regressione in blu, riportando bande di confidenza distanti dalla regressione due volte l'*errore standard*.

m	Errore standard m	q	Errore standard q	r²
-0.535	$6.52 \cdot 10^{-3}$	4.05	$18.8 \cdot 10^{-3}$	0.9944

Figura 3-6: regressione lineare $y = m x + q$ calcolata tramite Mathematica ®.

dalla quale segue la stima dell'*esponente di stabilità* e del suo errore

$$\alpha = 1.87 \pm 0.02$$

risultando inferiore a 2, l'*esponente di stabilità* di un modello *Random Walk*.

3.2.2. Modello Random Walk

Ripetendo le stesse analisi per la serie generata dal modello *Random Walk* si stima l'*esponente di stabilità*, ottenendo $\alpha = 2.01 \pm 0.03$ come atteso (ricordiamo infatti che per $\alpha = 2$ la distribuzione di Lévy coincide con la distribuzione normale di Gauss).

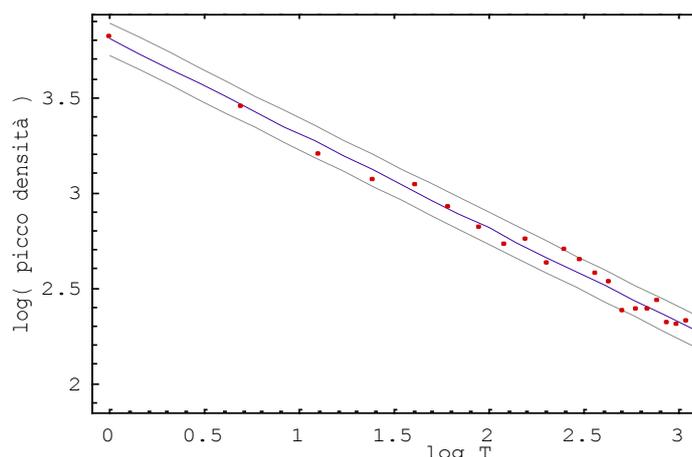


Figura 3-7: modello *Random Walk*, *esponente di stabilità*. Regressione lineare tra il logaritmo del massimo della distribuzione dei *rendimenti* di periodo T ed il logaritmo di T . I dati sperimentali sono indicati in rosso, la regressione in blu, riportando bande di confidenza distanti dalla regressione due volte l'*errore standard*.

3.3. Distribuzione

Consideriamo i *rendimenti* dell'indice S&P 500 calcolando:

- la distribuzione sperimentale;
- la distribuzione di Lévy avente l'*esponente di stabilità* $\alpha=1.87$ prima calcolato ed il *fattore di scala* ricavato da un'interpolazione;
- la distribuzione normale avente la media e la varianza dei *rendimenti*.

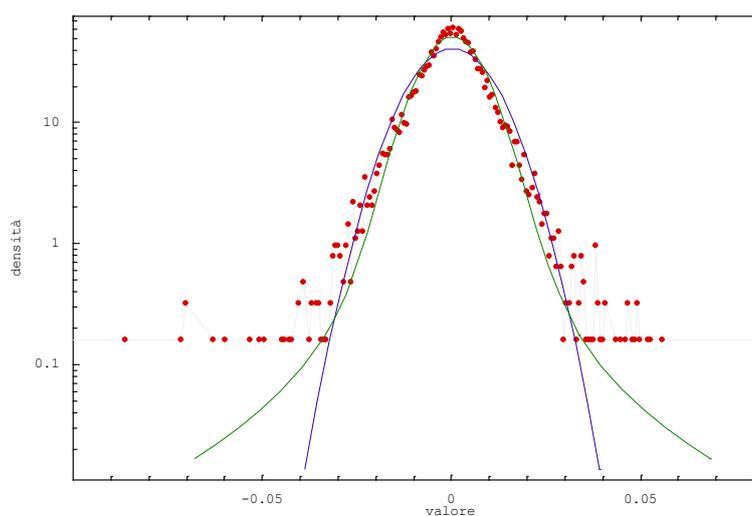


Figura 3-8: S&P 500, distribuzione dei *rendimenti* (punti rossi), distribuzione di Lévy $\alpha=1.87$, $a=60 \cdot 10^{-6}$ in verde (è disegnato l'intervallo $\pm 7\sigma$), distribuzione normale con la stessa media e varianza dei *rendimenti* in blu (è disegnato l'intervallo $\pm 4\sigma$).

Il fitting di Lévy porge un *fattore di scala* $a=60 \cdot 10^{-6}$. L'*errore standard*⁵ è pari a 2.57 per la distribuzione di Lévy (3.9% del massimo della distribuzione) e di 5.57 per la distribuzione di Gauss (8.5% del massimo della distribuzione).

In definitiva risulta evidente che la distribuzione di Lévy sia in grado di tracciare molto bene l'andamento dei dati sperimentali nella parte centrale, a dispetto della distribuzione normale.

Anche qualitativamente, confrontando la precedente distribuzione con la distribuzione dei *rendimenti* del modello *Random Walk*

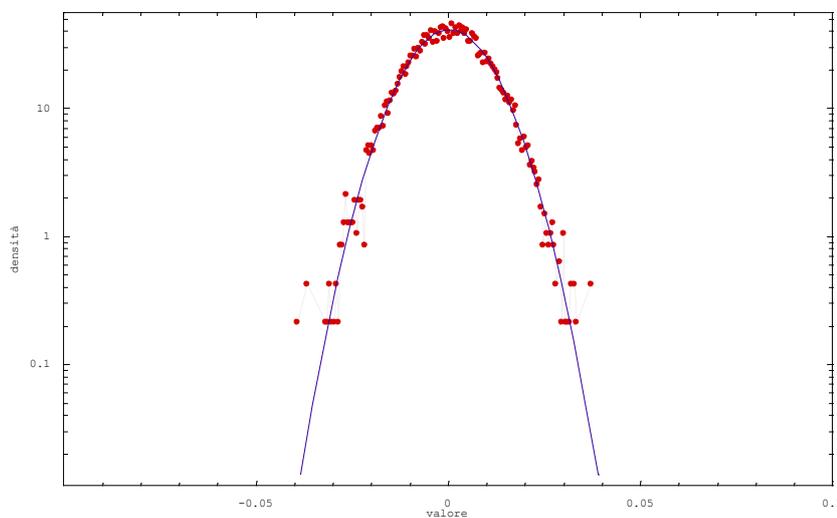


Figura 3-9: modello *Random Walk*, distribuzione dei *rendimenti* (punti rossi), distribuzione normale con la stessa media e varianza in blu (è disegnato l'intervallo $\pm 4\sigma$).

possiamo vedere come la rischiosità reale dell'indice S&P 500 sia superiore, in quanto caratterizzata da code spesse (*fat tails*) ed eventi “oltre 3σ ” molto frequenti.

3.4. Cluster ed autocorrelazione

Osservando la serie storica dei *rendimenti* dell'indice S&P 500, v. par. 3.1, è possibile notare la presenza di periodi caratterizzati da ampie oscillazioni, seguiti da momenti di relativa “tranquillità”. Il fenomeno non è presente nella serie generata dal modello *Random*

⁵ L'*errore standard* è la radice quadrata della media degli scarti quadratici tra la curva d'interpolazione ed i dati sperimentali.

Walk, il quale manifesta oscillazioni omogenee. Inoltre, la *volatilità*⁶ dell'indice è caratterizzata da una componente ciclica dominante di tipo “*infrarosso*” (di lungo periodo) che è possibile vedere confrontando l'ampiezza della Fast Fourier Transform con quella del modello *Random Walk*, Figura 3-10.

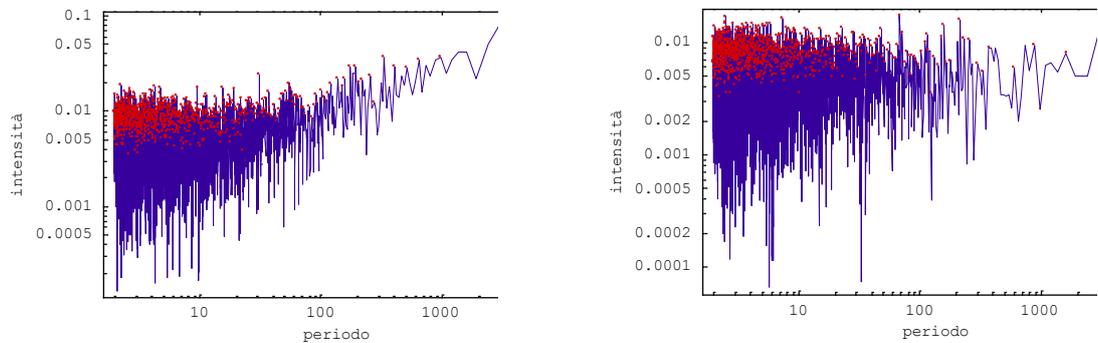


Figura 3-10: ampiezza dell’F.F.T. della *volatilità* dell’indice S&P 500 a sinistra confrontata con l’ampiezza dell’F.F.T. della *volatilità* della serie storica generata dal modello *Random Walk*, a destra. Si noti come l’andamento dei massimi più importanti, segnati in rosso, sia nel primo caso crescente, nel secondo stazionario.

Misuriamo quindi il *coefficiente di autocorrelazione*⁷ della *volatilità* tramite una regressione lineare⁸ sui primi 80 ritardi, ottenendo $0.179 \pm 3.0 \cdot 10^{-3}$ per l’S&P500 e $39 \cdot 10^{-6} \pm 40 \cdot 10^{-6}$ per il modello *Random Walk*.

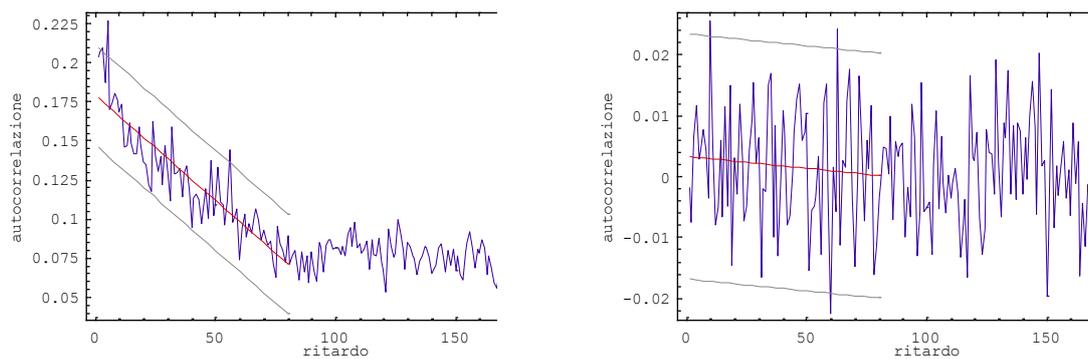


Figura 3-11: *autocorrelazione* della *volatilità* (in blu) dell’indice S&P 500 a sinistra e della serie generata dal modello *Random Walk* a destra. Le regressioni lineari sono calcolate sui ritardi $L=1 \dots 80$, in rosso, accompagnate da bande di confidenza distanti dalla regressione 2 volte l’*errore standard*, in grigio.

⁶ Misuriamo la *volatilità* tramite il valore assoluto dei *rendimenti*.

⁷ Data una serie storica $v(t)$, l’*autocorrelazione* di ritardo L è la correlazione lineare tra $v(t)$ e $v(t-L)$, v. 2.3.

⁸ Il coefficiente di *autocorrelazione* è pari all’intercetta della regressione lineare dell’*autocorrelazione* di ritardo L verso il ritardo L stesso.

Per verificare la legge di decadimento esponenziale, v. 2.3, si è calcolata la regressione lineare del logaritmo dell'*autocorrelazione* verso i primi 80 ritardi⁹

$$v = \log A_r. \quad x = L. \quad v = m x + a$$

ottenendo

m	Errore standard m	q	Errore standard q	r ²
-10.7·10 ⁻³	556·10 ⁻⁶	-1.68	25.9·10 ⁻³	0.8229

Figura 12: regressione lineare del logaritmo di *autocorrelazione* di ritardo L verso il ritardo L stesso, per L=1...80.

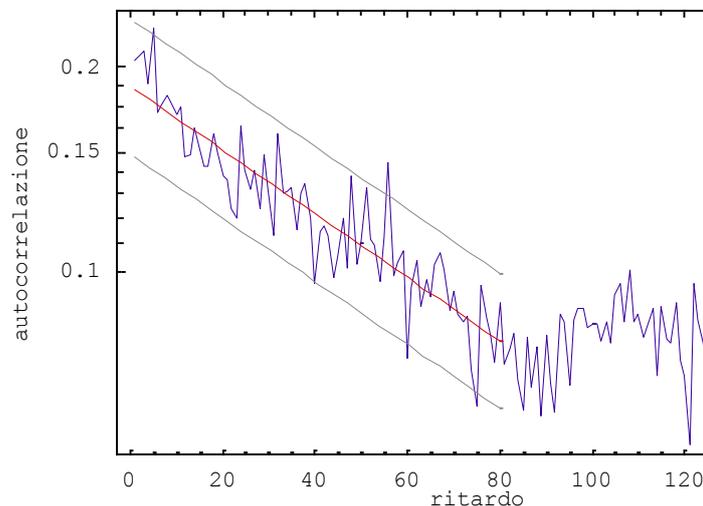


Figura 3-13: indice S&P 500, *autocorrelazione* della *volatilità* (in blu). Regressione lineare (in rosso) tra il logaritmo dell'*autocorrelazione* di ritardo L verso il ritardo stesso, per L=1...80. Le bande di confidenza sono distanti dalla regressione due volte l'*errore standard*.

dalla quale segue la stima dell'*esponente di decadimento* $\gamma = -m = 10.7 \cdot 10^{-3} \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$.

In conclusione, la serie storica dei prezzi giornalieri dell'indice S&P500 è caratterizzata da cluster di *volatilità*, componenti cicliche dominanti di tipo "*infrarosso*", *autocorrelazione* della *volatilità* in accordo con una legge di decadimento esponenziale.

⁹ Calcolando l'esponenziale dell'intercetta è possibile stimare anche per questa via il *coefficiente di autocorrelazione*, v. 2.3, ottenendo $0.186 \pm 4.8 \cdot 10^{-3}$, ma il metodo precedente, più semplice, è anche quello più comunemente utilizzato in finanza.

4. Modello finanziario

Costruiamo un modello nel quale vengono astratte quelle che riteniamo siano le caratteristiche strutturali di un mercato finanziario, in grado di generare andamenti di prezzo compatibili con quanto descritto nel capitolo precedente. Seguiamo le linee guida tracciate da T. Kaizoji, S. Bornholdt e Y. Fujiwara in ‘*Dynamics of price and trading volume in a spin model of stock markets with heterogeneous agents*’ [9].

4.1. Classi d’investitori

Dividiamo gli investitori nelle classi:

- *investitori tecnici, o interactive traders,*
- *investitori fondamentalisti.*

Gli *investitori tecnici* intervengono nel mercato tramite l’utilizzo dell’analisi tecnica, fondata sull’assioma “Il prezzo di un’attività finanziaria sconta tutte le informazioni disponibili”. Per questo gli *investitori tecnici* guardano esclusivamente l’andamento del prezzo in funzione del tempo¹⁰ per decidere quando comprare o vendere. Sono detti *interactive traders* in quanto la loro azione è, in definitiva, legata all’azione sul mercato degli altri investitori.

Gli *investitori fondamentalisti* al contrario cercano, studiando ogni aspetto dell’attività finanziaria (analisi di bilancio, macroeconomiche, notizie etc.), di determinarne il “giusto prezzo” (fair price), comprando quando il prezzo reale risulta inferiore, vendendo quando superiore, e non si fanno influenzare dall’operato degli altri investitori.

¹⁰ In realtà gli investitori tecnici guardano anche altre grandezze, quali i volumi scambiati, le proposte in denaro e lettera, indicatori di “sentiment”, i quali sono comunque legate sempre all’azione degli altri investitori sul mercato.

4.1.1. Investitori tecnici, descrizione

L'assioma dell'analisi tecnica comporta due tipi di strategie per gli *investitori tecnici*:

1. *operatività in tendenza*, “trend is your friend”, compra seguendo le tendenze dei prezzi, ovvero il comportamento degli altri investitori;
2. *operatività contro tendenza*, intervieni quando i prezzi manifestano eccessi statistici.

Nel bagaglio di ogni analista tecnico sono presenti strumenti che permettono di seguire le due strategie.

Per quanto riguarda *l'operatività in tendenza*, l'analista tecnico utilizza comunemente l'analisi grafica, medie mobili (semplici, pesate, esponenziali, adattative, volumetriche, ...), regressioni lineari e paraboliche, indicatori direzionali e molti altri. Tutti questi segnalano quando una tendenza si è sviluppata sufficientemente per poter essere seguita.

Ad esempio, è frequente l'utilizzo di due *medie mobili esponenziali* applicate ai prezzi, comprando quando la più veloce taglia verso l'alto quella più lenta e vendendo nella condizione simmetrica.



Figura 4-1: sistema di trading basato su due medie mobili esponenziali: acquisto quando la più veloce (in rosso) taglia verso l'alto la più lenta (in blu), vendita quando la più veloce taglia verso il basso la più lenta.

L'operatività contro tendenza consiste invece nell'acquistare quando i prezzi risultano eccessivamente bassi rispetto ad un determinato modello statistico, vendendo simmetricamente.

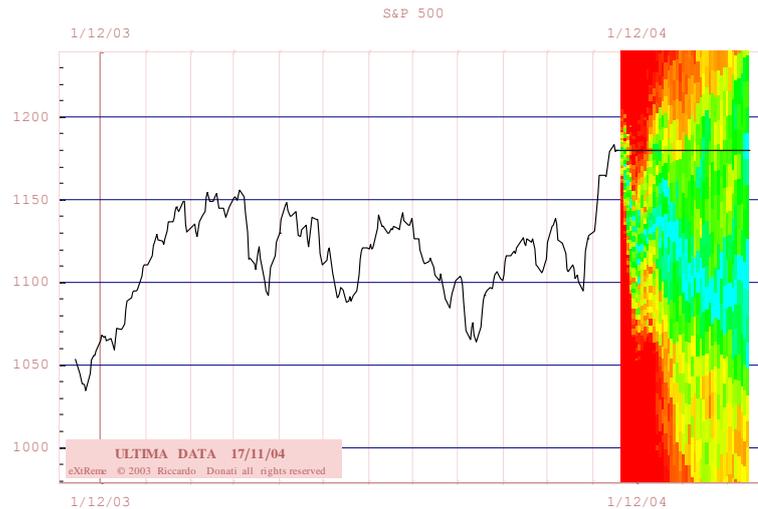


Figura 4-2: modello per l'analisi di eccessi statistici di prezzo su diversi orizzonti temporali.

Entrambi questi modi di operare possono coesistere all'interno di uno stesso modello d'investimento basato sull'analisi tecnica ed in entrambi i casi gli investitori prevedono tecniche che comportano l'abbandono della posizione finanziaria se i prezzi dovessero muoversi contro le aspettative (*stop loss*). Nelle fasi di prezzo più "estreme" (persistenti rialzi o ribassi), è comune vedere gli *investitori tecnici* alternare l'ingresso in posizione (acquisto/vendita) con lo stop, inseguendo il tentativo di speculare sulla formazione dei massimi o dei minimi.

4.1.2. Investitori tecnici, modello

Si modella il comportamento degli *investitori tecnici* tramite un reticolo di spin, in modo da rendere conto della loro reciproca interazione. La corrispondenza è così costruita:

- s_i è l'investitore tecnico i -esimo;
- il sistema consta di N *investitori tecnici*;
- discretizzando il tempo, ad ogni passo l'investitore tecnico i -esimo compra ($s_i = +1$) oppure vende ($s_i = -1$) lo stesso quantitativo U_i di titoli della stessa attività finanziaria AF.

Il numero n_+ d'*investitori tecnici* che acquistano e il numero n_- d'*investitori tecnici* che vendono soddisfano alle

$$(n_+ + n_-) = N$$

$$(n_+ - n_-) = \sum_{i=1}^N s_i$$

dalle quali

$$(n_+ - n_-) = (n_+ - (N - n_+)) = (2n_+ - N) = \sum_{i=1}^N s_i$$

$$\Rightarrow n_+ = \frac{\sum_{i=1}^N s_i + N}{2}$$

$$n_- = N - \frac{\sum_{i=1}^N s_i + N}{2} = \frac{N - \sum_{i=1}^N s_i}{2}$$

Complessivamente gli *investitori tecnici* creano un eccesso di domanda (o di offerta se negativo) pari al numero di titoli

$$\Delta U = U_0 \sum_{i=1}^N s_i$$

scambiando tra di loro una quantità di titoli pari a

$$U_{\text{scambiati internamente}} = U_0 \text{Min}(n_+, n_-)$$

Il numero complessivo di titoli scambiati, considerando anche l'assorbimento dell'eccesso di domanda o di offerta, è

$$U_{\text{scambiati}} = U_{\text{scambiati internamente}} + |\Delta U|$$

distinguendo i due casi

$$n_+ > n_- \Rightarrow U_{\text{scambiati}} = U_{\text{scambiati internamente}} + \Delta U =$$

$$U_0 n_- + U_0 \sum_{i=1}^N s_i = U_0 \frac{N - \sum_{i=1}^N s_i + 2 \sum_{i=1}^N s_i}{2} = U_0 \frac{N + \sum_{i=1}^N s_i}{2}$$

$$n_- > n_+ \Rightarrow U_{\text{scambiati}} = U_{\text{scambiati internamente}} - \Delta U =$$

$$U_0 n_+ - U_0 \sum_{i=1}^N s_i = U_0 \frac{\sum_{i=1}^N s_i + N - 2 \sum_{i=1}^N s_i}{2} = U_0 \frac{N - \sum_{i=1}^N s_i}{2}$$

in sintesi

$$U_{\text{scambiati}} = U_0 \frac{N + \left| \sum_{i=1}^N s_i \right|}{2}$$

4.1.3. Investitori fondamentalisti, modello

Si modella il comportamento degli *investitori fondamentalisti* come segue:

- vi sono M *investitori fondamentalisti* nel mercato;
- l' m -esimo investitore fondamentalista calcola, ad ogni istante di tempo t , un “fair price” $P_{m,t}^*$ per l’attività finanziaria AF, ovvero quello che ritiene sia il “giusto prezzo” di AF;
- ogni investitore fondamentalista interviene nel mercato comprando (vendendo) una quantità di titoli proporzionale alla differenza $\log P(t) - \log P_{m,t}^*$ dove $P(t)$ è il prezzo di AF al tempo t .

Differentemente dagli analisti tecnici, il cui comportamento dipende da quello degli altri investitori, la valutazione del prezzo $P_{m,t}^*$ è indipendente da m e da t . Inoltre *si suppone che nessuno sia in grado di determinare il fair price* $P_{m,t}^*$. Per questo è lecito ritenere, in virtù del teorema del limite centrale, che la somma¹¹ su tutti gli *investitori fondamentalisti* di $\log P_{m,t}^*$, chiamiamola $\log P^*(t)$, segua un andamento di tipo *Random Walk*, v. E.F. Fama, ‘*Efficient capital market: a review of theory and empirical work*’ [5] ed Itzykson, ‘*Statistical Field Theory*’ [8] capitolo “From Brownian Motion to Euclidean Fields”.

¹¹ Si parla del logaritmo dei prezzi poiché, come visto in 2.1.2, costituisce il modo più naturale per misurare l’effetto delle operazioni di acquisto/vendita.

4.2. Modello di mercato

Il prezzo dell'attività finanziaria AF è generato dall'equilibrio della domanda e dell'offerta di tutti gli investitori che intervengono nel mercato. I titoli acquistati o venduti dagli *investitori fondamentalisti* assorbono l'eccesso di offerta o domanda creata dagli investitori tecnici

$$U_0 \sum_{i=1}^N s_i = \sum_{m=1}^M k (\log P(t) - \log P_m^*(t)) = k M \log P(t) - k \sum_{m=1}^M \log P_m^*(t)$$

consentendo di esprimere il prezzo P(t) di AF:

$$\log P(t) = \frac{U_0}{M k} \sum_{i=1}^N s_i + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \log P_m^*(t)$$

ovvero, accorpendo le costanti

$$\log P(t) = a \sum_{i=1}^N s_i + b \log P^*(t)$$

$$\log P(t) = a \sum_{i=1}^N s_i + w(t)$$

dove W(t) segue un andamento di tipo *Random Walk* .

In definitiva, il log-prezzo generato dal modello finanziario è pari alla somma della magnetizzazione istantanea del modello di spin, il quale rende conto dell'operato degli *investitori tecnici*, e di un andamento di tipo *Random Walk* che tiene conto dell'azione degli operatori fondamentalisti.

Diversamente dalla pubblicazione di S. Bornholdt [9], si è deciso di non trascurare l'effetto di W(t), in modo da rendere conto delle leggi di scala 2.2.5, come si vedrà nel dettaglio nelle simulazioni del capitolo 8.

Per fissare le idee, sia dunque $a=1$ e supponiamo che si desideri simulare l'andamento dei prezzi giornalieri di un'attività finanziaria. In tale orizzonte temporale, il cammino *Random Walk* $W(t)$ varia molto lentamente (i bilanci delle aziende, per esempio, sono pubblicati con cadenza trimestrale) per questo è possibile costruire $W(t)$ in questo modo:

- si genera un andamento $W_0(t)$ tale che $W_0(t)-W_0(t-1)$ siano indipendenti, normalmente distribuiti con media nulla e la stessa varianza della serie prodotta dal modello di spin (l'incidenza sui *rendimenti* degli *investitori tecnici* è così equiparata all'incidenza degli *investitori fondamentalisti*);
- si calcola la media mobile a 60 periodi di $W_0(t)$ ottenendo $W(t)$, rendendo conto della lenta variabilità delle grandezze fondamentali.

4.3. Modello di spin

Il modello di mercato sviluppato nei paragrafi precedenti consente di esprimere il log-prezzo di un'attività finanziaria AF come combinazione lineare di un andamento *Random Walk* e della magnetizzazione istantanea di un modello di spin.

Si tratta ora di sviluppare le interazioni tra spin più appropriate alla descrizione del comportamento degli *investitori tecnici*. Per fare questo, si definisce un campo locale, così come visto nel paragrafo 1.2, scrivendolo come somma di un termine d'interazione tra primi vicini di tipo ferromagnetico locale ed un termine d'interazione antiferromagnetico globale.

Quindi si procede a “*termalizzare*” il campo risultante tramite l'introduzione di un'opportuna dinamica.

4.3.1. Interazione tra primi vicini

L'attitudine ad operare *in tendenza* degli *investitori tecnici* può essere descritta dalla già incontrata interazione

$$h_{J,k} = J \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j$$

con $J > 0$ (termine ferromagnetico), per la quale l'investitore k -esimo tende a comprare o vendere in relazione al comportamento degli investitori primi vicini, dando luogo a fenomeni di comportamento di massa paragonabili alla magnetizzazione spontanea.

Il campo locale deriva dal termine Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i,j \in \langle \rangle} s_i s_j .$$

4.3.2. Interazione antiferromagnetica

Per descrivere il comportamento *in contro tendenza* degli *investitori tecnici*, sono state introdotte due forme d'interazione.

INTERAZIONE HAMILTONIANA

La prima forma d'interazione studiata discende immediatamente dalla definizione di operatività "contro tendenza" e viene espressa tramite il campo locale:

$$h_{\alpha,k} = -2 \frac{\alpha}{N} \sum_{i \neq k} s_i .$$

Il significato finanziario è il seguente: l'investitore k -esimo tende a comportarsi contrariamente rispetto alla media di tutti gli altri investitori; tanto più la tendenza globale è definita, tanto più il singolo investitore tenderà ad un comportamento contrario rispetto alla massa, secondo il parametro α .

Questa interazione è di tipo Hamiltoniano, derivando da

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha}{N} \left(\sum_i s_i \right)^2$$

La verifica è diretta. Mettendo in evidenza il k -esimo spin nell'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha}{N} \left(\sum_i s_i \right)^2 = \frac{\alpha}{N} \left(\sum_{i \neq k} s_i + s_k \right)^2 =$$

$$\frac{\alpha}{N} \left[\left(\sum_{i \neq k} s_i \right)^2 + s_k^2 + 2 \left(\sum_{i \neq k} s_i \right) s_k \right]$$

si può calcolare la nuova energia dopo il flip $s_k \rightarrow s_k'$

$$\mathcal{H}' = \frac{\alpha}{N} \left[\left(\sum_{i \neq k} s_i \right)^2 + s_k'^2 + 2 \left(\sum_{i \neq k} s_i \right) s_k' \right]$$

La differenza di energia è

$$\Delta\mathcal{H} = \frac{\alpha}{N} \left[\left(\sum_{i \neq k} s_i \right)^2 + s_k'^2 + 2 \left(\sum_{i \neq k} s_i \right) s_k' - \left(\sum_{i \neq k} s_i \right)^2 - s_k^2 - 2 \left(\sum_{i \neq k} s_i \right) s_k \right] =$$

$$\frac{\alpha}{N} \left[s_k'^2 + 2 \left(\sum_{i \neq k} s_i \right) s_k' - s_k^2 - 2 \left(\sum_{i \neq k} s_i \right) s_k \right]$$

poiché $s_k' = -s_k$ si ha

$$\Delta\mathcal{H} = \frac{\alpha}{N} \left[+2 \left(\sum_{i \neq k} s_i \right) s_k' - 2 \left(\sum_{i \neq k} s_i \right) s_k \right] = - \left(-2 \frac{\alpha}{N} \sum_{i \neq k} s_i \right) (s_k' - s_k)$$

come richiesto.

Dal punto di vista del modello fisico, il termine produce un incremento dell'energia all'aumentare della magnetizzazione globale in competizione, al di sotto della temperatura critica di Ising, con l'interazione tra primi vicini, la quale tende a portare il sistema verso uno stato di magnetizzazione definita (magnetizzazione spontanea). Ci si aspetta quindi che venga privilegiata la formazione di cluster di spin mantenendo comunque nulla la magnetizzazione media, come vedremo nelle simulazioni al capitolo 7.

INTERAZIONE DISSIPATIVA

Il secondo tipo d'interazione studiato per descrivere il comportamento "in contro tendenza" degli *investitori tecnici* viene introdotto per analogia al precedente tramite il campo locale:

$$h_{\gamma, k} = -2 \frac{\gamma}{N} s_k \left| \sum_{i \neq k} s_i \right| .$$

ed è, a meno di una costante, l'interazione introdotta da S. Bornholdt in '*Expectation bubbles in a spin model of markets: intermittency from frustration across scales*' [3].

In valore assoluto questo campo locale è uguale ad $h_{\alpha, k}$, così l'intensità sull'investitore k-esimo cresce al crescere dell'attitudine media all'acquisto (oppure alla vendita) di tutti gli investitori. Tuttavia, al contrario del precedente dove il segno del campo era opposto all'attitudine media, ora il segno del campo sull'investitore k-esimo è sempre opposto alla *sua* attitudine. Questa interazione agevola lo spin flipping (il cambio di attitudine) all'aumentare della magnetizzazione globale istantanea assoluta (dell'attitudine complessiva).

Dal punto di vista del modello finanziario l'interazione spiega l'erraticità di comportamento degli investitori tecnici in presenza di prezzi molto alti (*bolle speculative*) oppure molto bassi (crash), ben nota agli operatori. Consideriamo il caso di un mercato in crash: raggiunti valori di prezzo considerati appetibili, l'investitore tecnico cercherà di acquistare AF (operatività contro tendenza), tuttavia sarà costretto a chiudere la posizione *in stop* se quest'ultima non dovesse salire, ripetendo l'errore fino a quando non si sia verificata una reale *inversione di tendenza*.

Tornando al modello fisico, notiamo che l'interazione così introdotta non si può descrivere da un'Hamiltoniana che dipenda solo dallo stato del sistema: variando γ , ad ogni spin flip si ha una diminuzione dell'energia ed in effetti lo stesso Stefan Bornholdt, in una corrispondenza privata, concorda nel definire tale interazione *dissipativa*.

Si tratta dunque, a detta dello stesso Bornholdt, di un modo per descrivere le interazioni tra gli operatori finanziari tenendo conto degli effetti del rumore. In altri termini, le interazioni tra gli operatori (descritte da un campo locale) sono “termalizzate” tramite l’utilizzo di un modello dinamico fondato sulle differenze di energia, quale la dinamica di *bagno termico* richiamata nel paragrafo 1.4.

4.3.3. Interazione con un campo esterno

L’interazione con un campo esterno H

$$h_{H.k} = H$$

$$\mathcal{H}_{\text{campo esterno}} = -H \sum_{i=1}^N s_i$$

permette d’introdurre un orientamento collettivo privilegiato dovuto a fattori esterni globali, quali una particolare congiuntura macroeconomica di lungo periodo, tuttavia tale possibilità non verrà considerata in seguito.

4.3.4. Dinamica di bagno termico

Facciamo un passo indietro, ricordando che in effetti non stiamo studiando un sistema fisico reale, ma un modello finanziario il quale è stato dotato di un comportamento cinematico in virtù di un parallelismo con un sistema fisico. Ciò comporta che la dinamica è da considerarsi un elemento caratterizzante tanto quanto lo è la scelta delle interazioni. Scegliamo dunque la dinamica di *bagno termico*, considerata la dinamica naturale di un modello di spin e, come visto in 1.4, utilizzata in ambito “interdisciplinare” per studiare, tramite modelli di spin, le reti neurali, la formazione delle proteine e del DNA, la coagulazione del sangue, sistemi sociali e molti altri. In questo contesto viene impiegata come strumento per “termalizzare” le interazioni finanziarie espresse sotto forma di campo locale, supponendo che ogni spin del reticolo sia a contatto con una riserva di colore a temperatura T , “congelando” gli altri elementi e le relative interazioni., così come descritto in 1.3.

La temperatura del sistema modella quindi l’incertezza che caratterizza istante per istante l’operato di ogni investitore, rendendo conto in questo modo del “rumore” informativo che è tipico dei mercati finanziari.

5. Implementazione

5.1. Classe .NET Framework

Il nucleo della simulazione è stato inizialmente implementato tramite l'ambiente di sviluppo Mathematica[®] di Wolfram Research per compiere le prime analisi e verifiche, quindi è stata scritta una *classe .NET Framework*[®] di Microsoft in modo da:

- ottenere buone performances computazionali (velocità superiore di oltre 100 volte rispetto a Mathematica[®]);
- garantire l'interfacciabilità con i principali ambienti di sviluppo e distribuzione, compreso Mathematica[®] di Wolfram Research e IIS[®] di Microsoft per l'esposizione di un oggetto SOAP.

La classe, chiamata *montecarlo*, permette la simulazione della dinamica di *bagno termico* descritta in precedenza (*heat bath dynamics*), della dinamica di Metropolis e della dinamica di Glauber, seguendo le linee guida di Itzykson, '*Statistical Field Theory*' [8] capitolo "Numerical Simulations" e di Bar-Yam, '*Dynamics of Complex Systems*' [1] capitolo 1, "Statistical Fields".

Il sistema studiato è quello descritto in 4.3, caratterizzato da:

- interazione ferromagnetica locale regolata da J ;
- antiferromagnetica globale hamiltoniana regolata da α ;
- antiferromagnetica globale *dissipativa* regolata da γ ;
- campo esterno H .

Tutti e tre i metodi di simulazione coinvolgono nei calcoli esclusivamente la differenza di energia generata dallo spin flipping, in modo da poter considerare l'effetto dell'interazione *dissipativa* regolata da γ .

Il reticolo di spin è bidimensionale con topologia toroidale (condizioni periodiche al contorno).

Ogni *Montecarlo Step* (unità di tempo minima della simulazione) prevede l'aggiornamento di tutti gli spin del reticolo, potendo scegliere tra uno schema casuale oppure sequenziale.

5.1.1. Dinamica di bagno termico

Implementando la dinamica illustrata nel paragrafo 1.4, l'algoritmo seleziona uno spin s_i , calcola il campo locale h_i e la probabilità di avere $s_k = +1$:

$$P(+1) = \frac{1}{1 + e^{-\beta(\mathcal{H}(-1) - \mathcal{H}(+1))}} = \frac{1}{1 + e^{-\beta \Delta E_{-1 \rightarrow +1}}} = \frac{1}{1 + e^{2\beta h_k}}$$

Se tale probabilità è maggiore di un numero casuale scelto nell'intervallo $[0,1]$ lo spin viene imposto a +1, altrimenti a -1.

Viene aggiornata l'energia, la magnetizzazione e la loro media. Al termine di N passaggi, seguendo uno schema casuale oppure sequenziale, è stato compiuto un *Montecarlo Step*.

5.1.2. Dinamica di Metropolis e Glauber

L'algoritmo seleziona uno spin s_i e calcola la differenza di energia che sarebbe generata dal flip $s_k \rightarrow s_k' = -s_k$: $\Delta E = -h_k \Delta s_k$ dove

$$h_k = h_{J,k} + h_{H,k} + h_{\alpha,k} + h_{\gamma,k}$$

$$h_{J,k} = J \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j$$

$$h_{H,k} = H$$

$$h_{\alpha,k} = -2 \frac{\alpha}{N} \left(\sum_i s_i - s_k \right)$$

$$h_{\gamma,k} = -2 \frac{\gamma}{N} s_k \left| \sum_i s_i - s_k \right|$$

Viene quindi calcolata la probabilità di transizione che, per la catena di Metropolis è

$$r_{\text{Metropolis}, x \rightarrow y} = \begin{cases} 1 & \text{se } h_k \Delta s_k \geq 0 \\ \frac{\varphi_y}{\varphi_x} = e^{-\beta \Delta E} = e^{\beta h_k \Delta s_k} & \text{se } h_k \Delta s_k < 0 \end{cases}$$

per la catena di Glauber

$$r_{\text{Glauber}, x \rightarrow y} = \frac{1}{1 + e^{\beta \Delta E}} = \frac{1}{1 + e^{-\beta h_k \Delta s_k}}$$

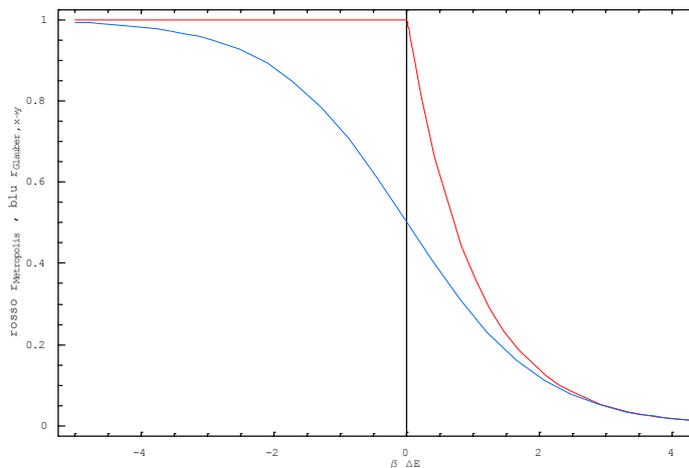


Figura 5-1: andamento della probabilità di transizione di Glauber in azzurro e di Metropolis in rosso.

La transizione viene convalidata se la probabilità r risulta maggiore di un numero casuale scelto nell'intervallo $[0,1]$. In tal caso si calcola la nuova energia istantanea sommando ΔE alla precedente, quindi si calcola la nuova magnetizzazione istantanea sommando

$$\Delta m = \sum_{i \neq k} s_i + s_k' - \sum_{i \neq k} s_i - s_k = \Delta s_k$$

alla magnetizzazione precedente. Viene quindi calcolata (anche se la transizione non è stata convalidata) la nuova media dell'energia e della magnetizzazione.

Il procedimento è ripetuto per il numero di spin del reticolo, seguendo uno schema casuale oppure sequenziale. Al termine di N passaggi è stato portato a termine un *Montecarlo Step*.

5.2. Mathematica packages

La classe *montecarlo* è istanziata in Mathematica® tramite .NET/Link, consentendo l'accesso a tutte le proprietà ed i metodi da parte dell'ambiente di sviluppo ad alto livello di Steven Wolfram.

Si sono implementati diversi packages per ottenere le funzionalità richieste per l'analisi e l'elaborazione dei dati:

- *timeSeries* per l'elaborazione delle serie storiche (load di serie storiche da banche dati Metastock ® e Bloomberg ®, framework per l'elaborazione delle date);
- *movingIndicator* per il calcolo di indicatori su serie storiche (media mobile, differenze percentuali, differenze logaritmiche, *volatilità*);
- *timeSeriesMontecarlo* per l'implementazione e l'analisi di simulazioni “Alla Montecarlo”;
- *stats* per il calcolo di distribuzioni statistiche, *autocorrelazione*, spettro di Fourier su dati sperimentali;
- *graphics* per generare grafici di serie storiche finanziarie

già impiegati nei capitoli precedenti per l'analisi dei *rendimenti*, il calcolo e la rappresentazione grafica delle distribuzioni, delle regressioni, delle F.F.T., dell'*autocorrelazione*.

Inoltre Mathematica ® ha permesso una rapida implementazione degli algoritmi di calcolo delle funzioni non analitiche incontrate, quali quelle richieste nell'ambito della soluzione di Onsager e della distribuzione di Lévy.

6. Simulazione modello di Ising

Per verificare il programma sviluppato per le simulazioni (v. 5.1), e prendere confidenza con il problema e le grandezze, abbiamo simulato il modello di spin 4.3 con la sola interazione tra primi vicini attiva, ottenendo il classico *modello di Ising* descritto al capitolo 1. I risultati sono stati quindi confrontati con la soluzione di Onsager (v. 1.5).

I parametri delle simulazioni contenute in questo capitolo sono:

- reticolo di spin 50x50 (N=2500 spin);
- reticolo iniziale scelto casualmente;
- schema di aggiornamento casuale, v. paragrafo 5.1;
- dinamica di *bagno termico*, v. paragrafi 1.4 e 5.1.1;
- 25'000 *Montecarlo Steps* prima delle misure, in modo da permettere il raggiungimento dell'equilibrio;
- 100'000 *Montecarlo Steps* di misurazioni per temperature $T < 2$ e $T \geq 3$, 200'000 misurazioni per $2 \leq T < 3$, 400'000 misurazioni per $T = 2.269$;
- $J=1, \alpha=0, \gamma=0, T=1.269, \dots, 4.069$ ad incrementi di 0.02.

6.1. Grandezze Termodinamiche

6.1.1. Magnetizzazione

Si studia l'andamento della magnetizzazione media assoluta per spin $|\langle M/N \rangle|$ in funzione della temperatura, confrontandolo con la soluzione esatta di Onsager 1.5.4 calcolata tramite algoritmi scritti in Mathematica ®.

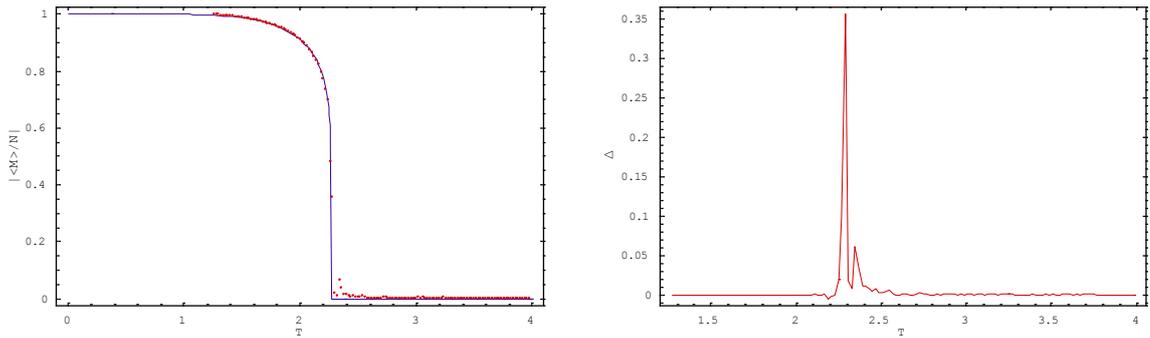


Figura 6-1: $|\langle M/N \rangle|$ rilevata dalla simulazione (punti rossi) a confronto con la soluzione di Onsager, in blu; differenza nel grafico a destra. L'errore standard¹² è 0.032.

Benché la magnetizzazione media sia sempre molto aderente alla soluzione di Onsager, si riscontra un picco d'errore in prossimità della temperatura critica $T_c \sim 2.269$.

6.1.2. Energia

Si studia l'andamento dell'energia media per spin $\langle U/N \rangle$ in funzione della temperatura, confrontandolo con la soluzione di Onsager.

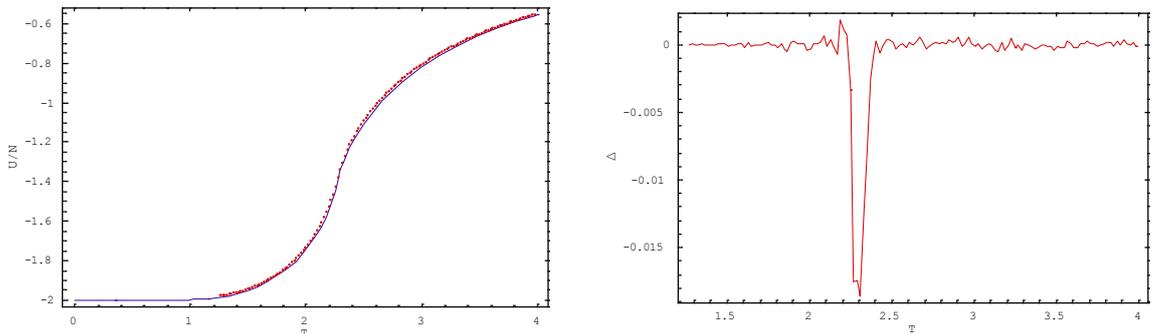


Figura 6-2: $\langle U/N \rangle$ rilevata dalla simulazione (punti rossi) a confronto con la soluzione di Onsager, in blu; differenza nel grafico a destra. L'errore standard è 0.0029.

L'aderenza rilevata è ottima in quanto lo stesso picco d'errore, in prossimità della temperatura critica, è minore, in valore assoluto, dell'errore standard delle misure sulla magnetizzazione.

¹² L'errore standard è la radice quadrata della media degli scarti quadratici tra la curva teorica ed i dati sperimentali.

6.1.3. Capacità termica

Si studia l'andamento della capacità termica per spin C/N in funzione della temperatura, confrontandolo con la soluzione di Onsager. Il calcolo di C discende dalla varianza dell'energia istantanea per spin, grazie al *teorema di fluttuazione dissipazione* richiamato al paragrafo 1.6.

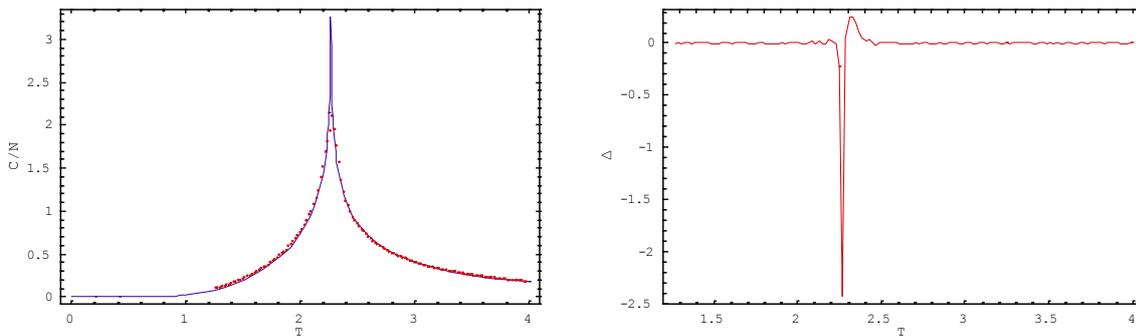


Figura 6-3: C/N rilevata dalla simulazione (punti rossi) a confronto con la soluzione di Onsager, in blu; differenza nel grafico a destra. L'errore standard è 0.21.

6.1.4. Suscettività magnetica

Si studia, al variare della dinamica, l'andamento della suscettività magnetica per spin χ/N in funzione della temperatura. Il calcolo di χ discende dalla varianza della magnetizzazione istantanea per spin, grazie al *teorema di fluttuazione dissipazione*

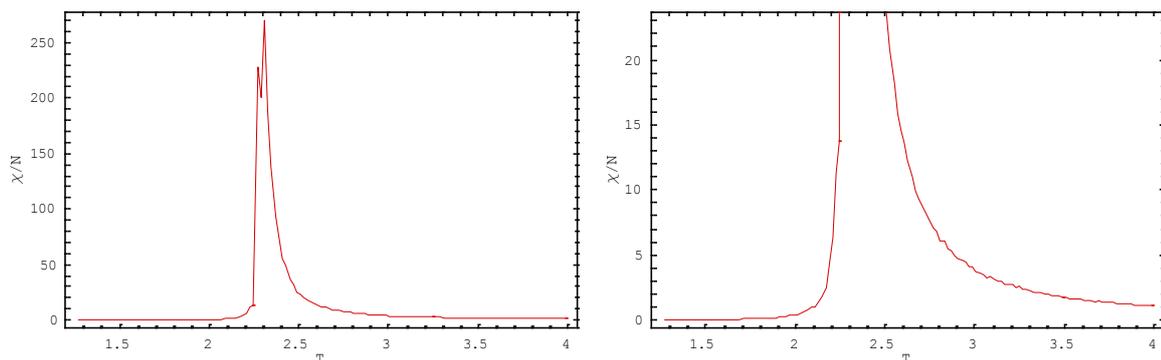


Figura 6-4: χ/N rilevata dalla simulazione, grafico a sinistra. A destra è riportato uno zoom troncando i valori superiori a 25.

riportando un andamento divergente in prossimità della temperatura critica.

6.1.5. Energia verso magnetizzazione

Le informazioni contenute nei grafici precedenti si possono riassumere in un grafico a dispersione, al variare di T , della magnetizzazione istantanea M/N verso l'energia istantanea U/N .

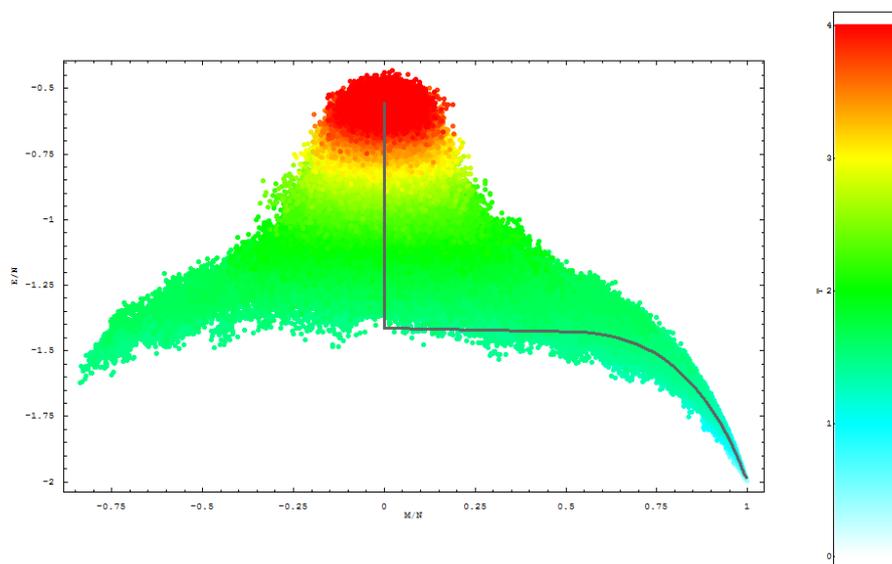


Figura 6-5: Grafico a dispersione delle coppie $(M/N, U/N)$ al variare della temperatura, confrontato con la soluzione di Onsager in grigio.

6.2. Dinamica dei prezzi

Secondo il modello di mercato descritto nel paragrafo 4.2, supponendo che sia lecito trascurare la componente *Random Walk*, il log-prezzo è pari alla magnetizzazione istantanea del modello di spin. E' quindi possibile studiare la serie storica che risulta dalle simulazioni per verificare le proprietà finanziarie descritte nel capitolo 2, seguendo le linee guida viste nel capitolo 3, brevemente richiamate in nota.

Per T maggiore della temperatura critica, il comportamento dei *rendimenti*¹³ è paragonabile a quello di un modello *Random Walk*, presentando distribuzione normale, assenza di ciclicità¹⁴ ed *autocorrelazione*¹⁵ della *volatilità*¹⁶ compatibile con lo zero¹⁷, come si vede in

¹³ Il *rendimento* $r(t)$ è pari all'incremento della magnetizzazione istantanea per spin $m(t)-m(t-1)$.

¹⁴ La ciclicità è analizzata qualitativamente tramite l'intensità della Fast Fourier Transform della *volatilità*.

¹⁵ Data una serie storica $v(t)$, l'*autocorrelazione* di ritardo L è la correlazione lineare tra $v(t)$ e $v(t-L)$, v. 2.3.

¹⁶ Misuriamo la *volatilità* tramite il valore assoluto $|r(t)|$, v. 2.1.4.

Figura 6-6 ed in Figura 6-7. Anche per temperature in prossimità oppure inferiori alla temperatura critica si registra un comportamento simile, come da Figura 6-8 e Figura 6-9.

In definitiva, il *modello di Ising* in due dimensioni, con la sola interazione tra primi vicini, non riproduce serie storiche dei *rendimenti* compatibili con le caratteristiche rilevabili nei mercati finanziari neppure in prossimità o sotto la temperatura critica.

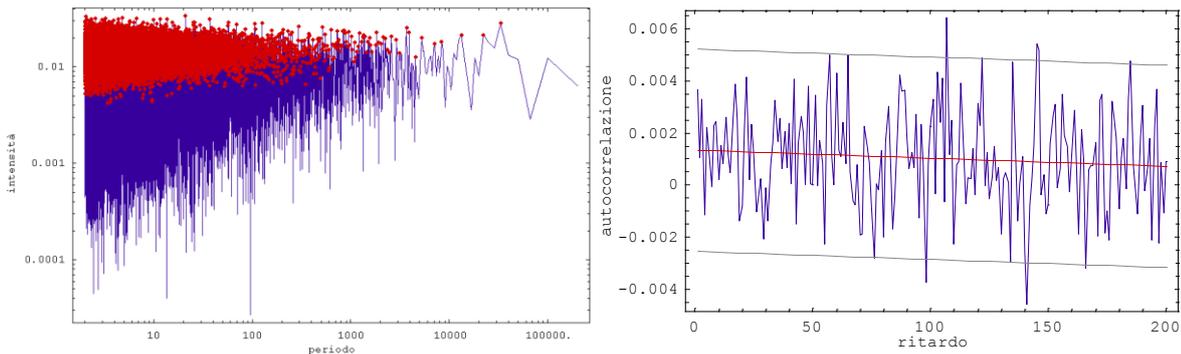


Figura 6-6: T=2.349 A sinistra si riporta l'intensità dell'F.F.T. della *volatilità*, a destra l'*autocorrelazione* della *volatilità* (coefficiente di autocorrelazione $1.3 \cdot 10^{-3}$) accompagnata dalla regressione lineare (in rosso) e da bande di confidenza distanti 2 volte l'*errore standard* (in grigio).

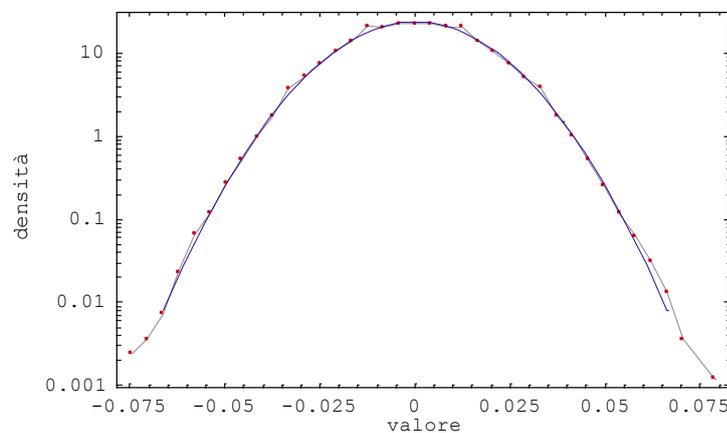


Figura 6-7: T=2.349 analisi della distribuzione dei *rendimenti* verso un fitting normale (*errore standard* 0.81, pari al 4.1% del picco della distribuzione).

¹⁷ Il coefficiente di *autocorrelazione* della *volatilità* è pari all'intercetta della regressione lineare dell'*autocorrelazione* di ritardo L verso il ritardo L stesso.

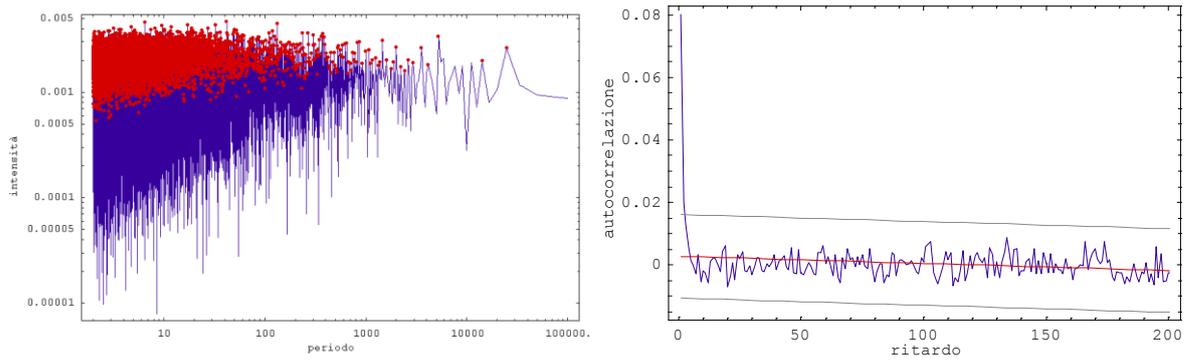


Figura 6-8: T=1.269 A sinistra si riporta l'intensità dell'F.F.T. della *volatilità*, a destra l'*autocorrelazione* della *volatilità* (*coefficiente di autocorrelazione* $2.7 \cdot 10^{-3}$) accompagnata dalla regressione lineare (in rosso) e da bande di confidenza distanti 2 volte l'*errore standard* (in grigio).

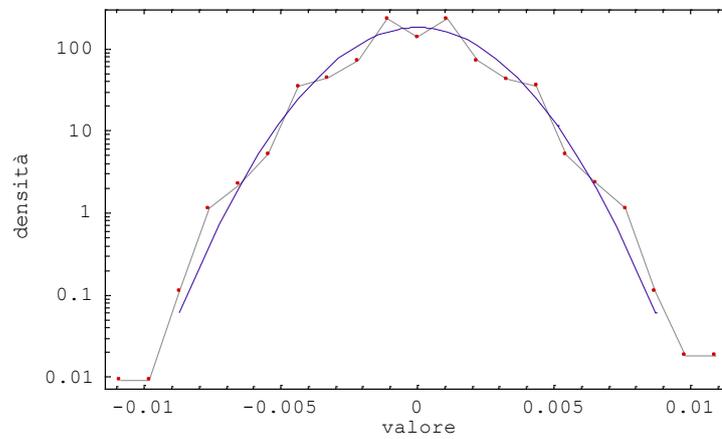


Figura 6-9: T=1.269 analisi della distribuzione dei *rendimenti* verso un fitting normale (*errore standard* 9.5, pari al 7.9% del picco della distribuzione).

7. Simulazione interazione Hamiltoniana

Come si è visto nel capitolo precedente, il *modello di Ising* in due dimensioni, con la sola interazione tra primi vicini, non è in grado di generare serie storiche dei *rendimenti* con le caratteristiche peculiari richieste (distribuzioni di Lévy, *fat tails*, *autocorrelazione* e ciclicità della *volatilità*). Anche in prossimità ed al di sotto della temperatura critica, la serie dei *rendimenti* è molto simile a quella generata da un modello *Random Walk*.

E' stata quindi introdotta un'interazione di tipo antiferromagnetico globale, così come indicato al paragrafo 4.3.2 – “Interazione Hamiltoniana”, sommando all'Hamiltoniana del *modello di Ising* il termine:

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha}{N} \left(\sum_i s_i \right)^2$$

il quale origina un campo locale

$$h_{\alpha,k} = -2 \frac{\alpha}{N} \sum_{i \neq k} s_i$$

L'intento era quello d'introdurre una componente antagonista all'interazione tra primi vicini, in modo da portare il sistema al di sotto della temperatura critica senza che si sviluppasse globalmente una magnetizzazione spontanea, mantenendo tuttavia localmente il fenomeno di aggregazione tra gli spin.

Benché i risultati finanziari ottenuti non siano stati quelli che si volevano, abbiamo deciso di riportarli comunque in quanto propedeutici allo sviluppo del modello di spin di S. Bornholdt [3] descritto in 4.3.2 – “Interazione Dissipativa”, ed utili come punto di partenza per ulteriori approfondimenti, v. ad esempio Vangheli Dorina Andru, Ardelean Gheorghe, 2000,

The Ising Like Statistical Models for Studying the Dynamics of the Financial Stock Markets, preprint cond-mat/0010318 in arxiv.org.[13].

I parametri delle simulazioni contenute in questo capitolo sono

- reticolo di spin 50x50;
- reticolo iniziale scelto casualmente;
- schema di aggiornamento casuale, v. paragrafo 5.1;
- dinamica di *bagno termico*, v. paragrafi 1.4 e 5.1.1;
- 25'000 *Montecarlo Steps* prima delle misure, in modo da permettere il raggiungimento dell'equilibrio;
- 100'000 *Montecarlo Steps* di misurazioni per temperature $T < 2$ e $T \geq 3$, 200'000 misurazioni per $2 \leq T < 3$, 400'000 misurazioni per $T = 2.269$;
- $J=1, \alpha=0.2, \gamma=0, T=1.269, \dots, 4.069$ ad incrementi di 0.02.

7.1. Grandezze Termodinamiche

7.1.1. Magnetizzazione

Si studia l'andamento della magnetizzazione media assoluta per spin $|\langle M/N \rangle|$ in funzione della temperatura, confrontandolo con la soluzione del *modello di Ising* di Onsager 1.5.4.

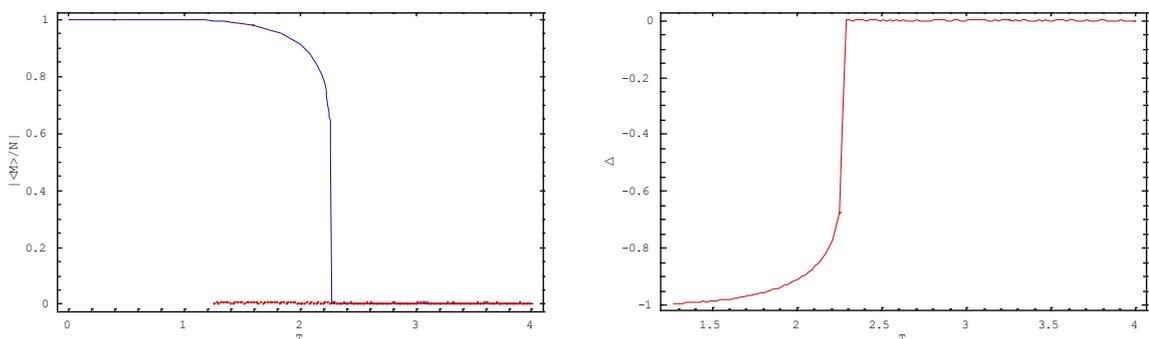


Figura 7-1: $|\langle M/N \rangle|$ rilevata dalla simulazione (punti rossi) a confronto con la soluzione di Onsager, in blu; differenza nel grafico a destra.

Come è possibile vedere, l'introduzione dell'interazione antiferromagnetica globale ha portato alla scomparsa della magnetizzazione spontanea nell'intervallo delle temperature

studiate. Al crescere della magnetizzazione totale, il termine antiferromagnetico alza l'energia del sistema, impedendo la transizione di fase.

7.1.2. Energia libera verso magnetizzazione

Approfondiamo l'argomento, studiando in questo paragrafo un sistema identico ma costituito da un reticolo più piccolo 15x15, in modo da permettere l'osservazione su scale temporali compatibili con i metodi e gli strumenti di simulazione.

La probabilità di trovare il sistema in uno stato con magnetizzazione istantanea definita $p(M)$ è inversamente proporzionale all'energia libera $A(M)$ (v. D. Chandler, 'Introduction to modern statistical mechanics' [4], capitolo "Monte Carlo Method In Statistical Mechanics"). Riportiamo dunque in un grafico $p(M)$ rilevata per $\alpha=0$ e per $\alpha=0.05$

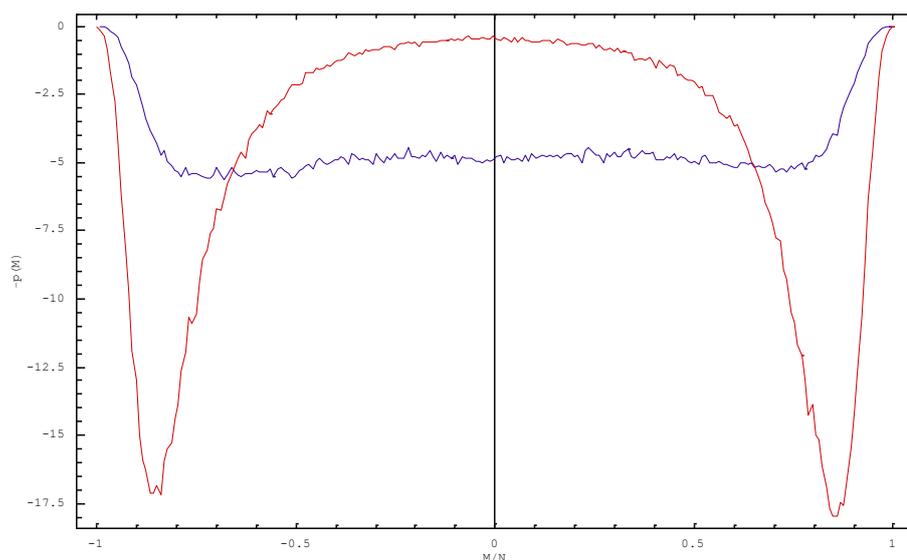


Figura 7-2: reticolo 15x15, T=2.25. Inverso della probabilità $p(M)$ per $\alpha=0$ in rosso ed $\alpha=0.05$ in blu.

Si vede come l'interazione antiferromagnetica sia causa, al di sotto della temperatura critica di Ising, della riduzione dell'energia di attivazione e della scomparsa delle "buche di potenziale". In questo modo il sistema non manifesta più la rottura spontanea della simmetria e la conseguente transizione di fase caratteristiche del *modello di Ising*. Contemporaneamente, l'interazione tra primi vicini continua ad agire privilegiando la formazione di raggruppamenti di spin, pur mantenendo globalmente una magnetizzazione prossima allo zero.

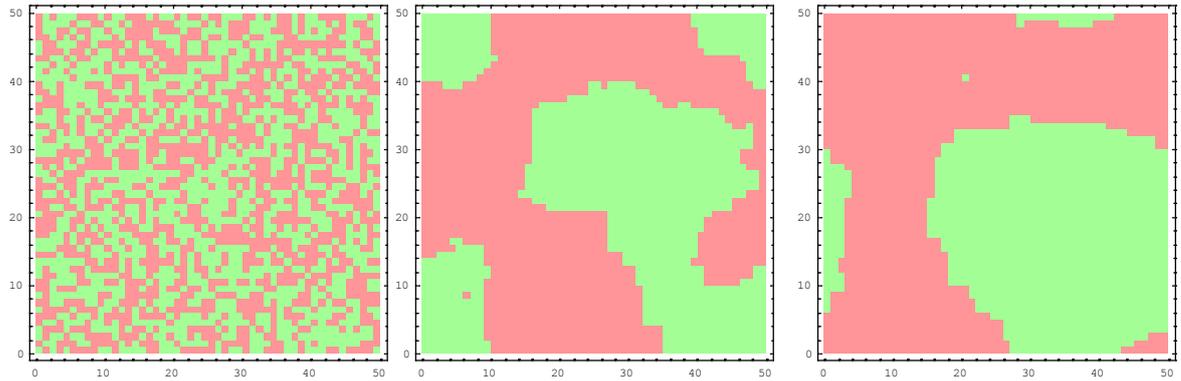


Figura 7-3 : reticolo di spin 50x50, $T=1.0$ con interazione $\alpha=0.2$ fotografato dopo 1, 100, 1000 *Montecarlo Steps*. Si noti la formazione di cluster dovuti all'interazione tra primi vicini e la magnetizzazione complessiva nulla per effetto dell'interazione antiferromagnetica globale. Lo stato raggiunto dal sistema è stabile.

7.1.3. Energia

Il valor medio dell'energia, come intuitivo, diverge da quello del *modello di Ising* in prossimità ed al di sotto della temperatura critica.

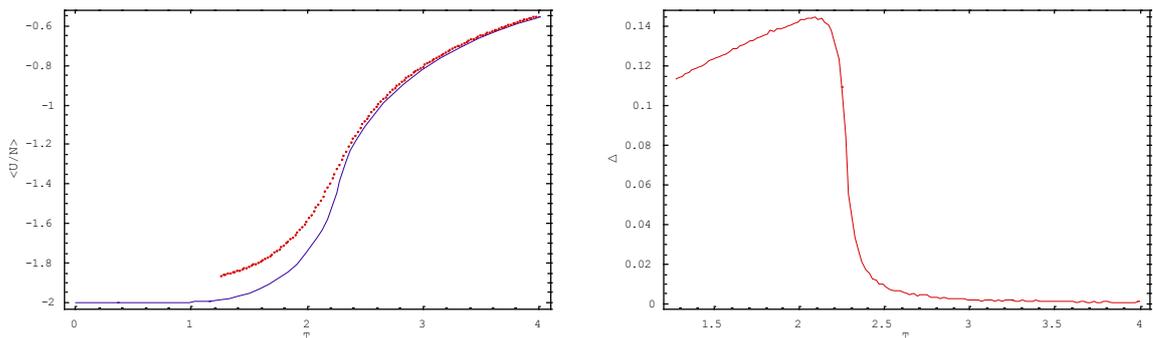


Figura 7-4: $\langle U/N \rangle$ rilevata dalla simulazione (punti rossi) a confronto con la soluzione di Onsager, in blu; differenza nel grafico a destra.

7.1.4. Capacità termica

Si studia l'andamento della capacità termica per spin C/N in funzione della temperatura, confrontandolo con la soluzione di Onsager 1.5.3. Il calcolo di C discende dalla varianza dell'energia istantanea per spin, grazie al teorema di fluttuazione dissipazione 1.6.

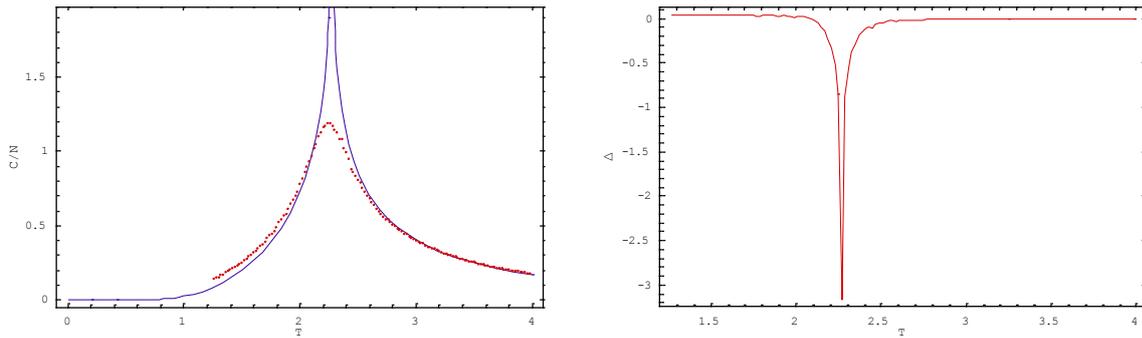


Figura 7-5: C/N rilevata dalla simulazione (punti rossi) a confronto con la soluzione di Onsager, in blu; differenza nel grafico a destra.

7.1.5. Suscettività magnetica

Si studia l'andamento della suscettività magnetica per spin χ/N in funzione della temperatura. Il calcolo di χ discende dalla varianza della magnetizzazione istantanea per spin, grazie al teorema di fluttuazione dissipazione 1.6.

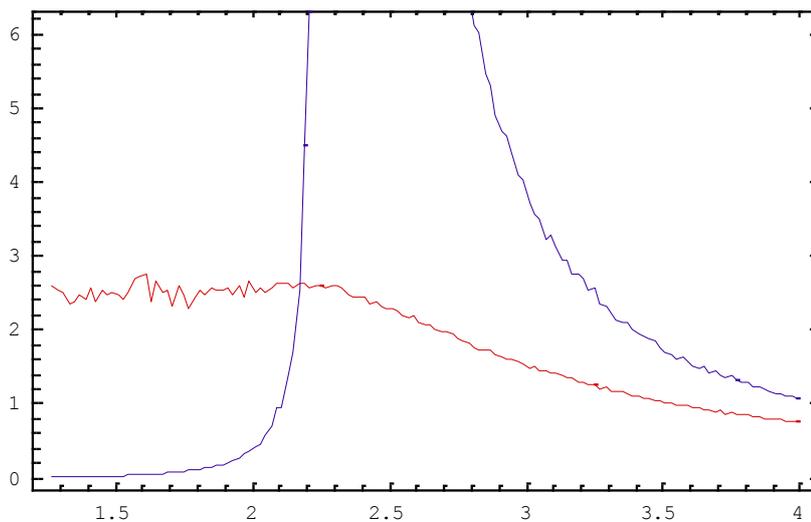


Figura 7-6: χ/N rilevata dalla simulazione in presenza dell'interazione antiferromagnetica globale (in rosso) e con la sola interazione tra primi vicini (in blu).

L'interazione antiferromagnetica porta alla scomparsa della divergenza in corrispondenza della temperatura critica T_c . Al di sotto T_c , le fluttuazioni di magnetizzazione rimangono vicine ad un valore costante.

7.1.6. Energia istantanea verso magnetizzazione istantanea

Le informazioni contenute nei grafici precedenti si possono riassumere in un grafico a dispersione, al variare di T , della magnetizzazione istantanea M/N verso l'energia istantanea U/N .

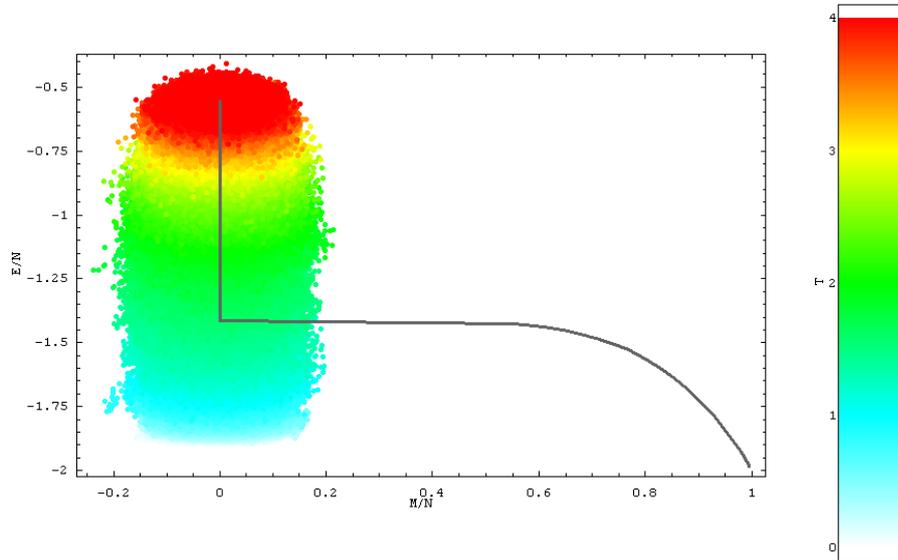


Figura 7-7: Grafico a dispersione delle coppie $(M/N, U/N)$ al variare della temperatura, confrontato con la soluzione di Onsager in grigio.

7.2. Dinamica dei prezzi

Seguendo lo stesso tipo di analisi visto in 6.2, riportiamo i risultati sulla dinamica dei prezzi al variare della temperatura, ricordando che in questo contesto il log-prezzo è pari alla magnetizzazione istantanea del modello di spin.

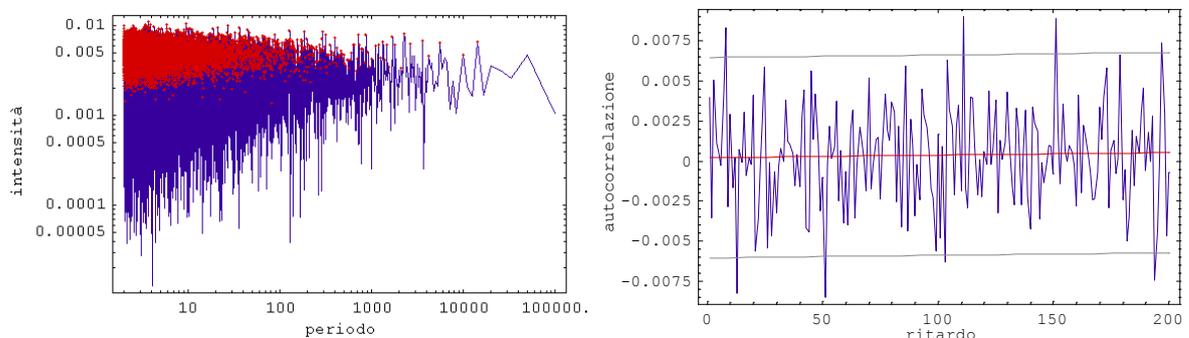


Figura 7-8: $T=1.269$ A sinistra si riporta l'intensità dell'F.F.T. della *volatilità*, a destra l'*autocorrelazione* della *volatilità* (coefficiente di autocorrelazione $0.2 \cdot 10^{-3}$) accompagnata dalla regressione lineare (in rosso) e da bande di confidenza distanti 2 volte l'*errore standard* (in grigio).

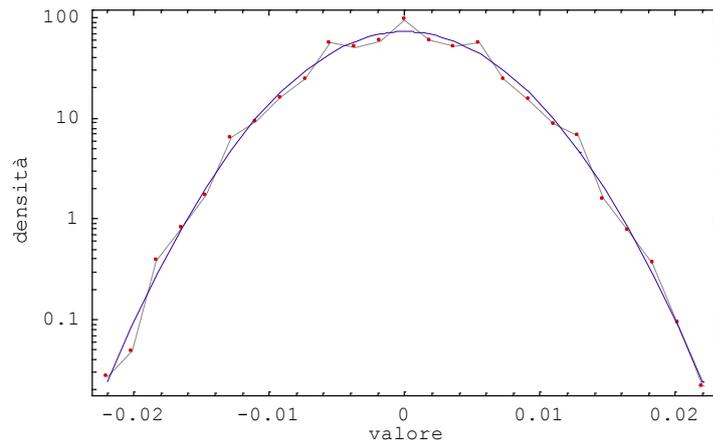


Figura 7-9: T=1.269 analisi della distribuzione dei *rendimenti* verso un fitting normale (*errore standard* 6.99, pari al 7.7% del picco della distribuzione).

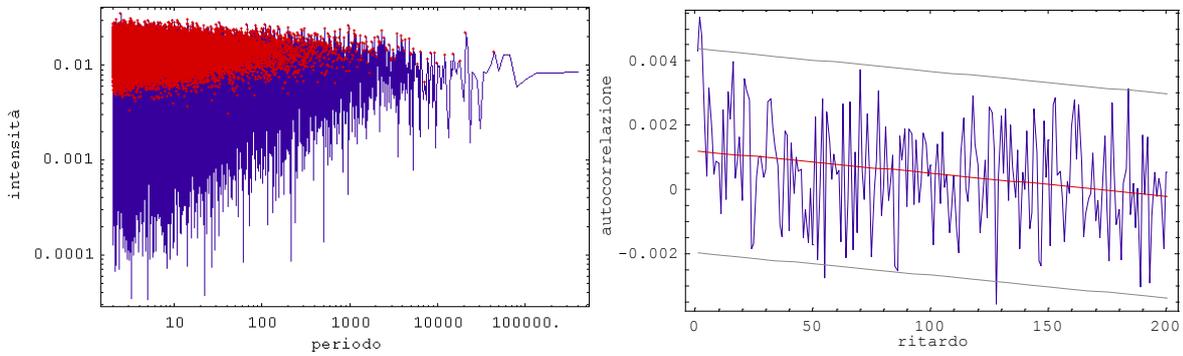


Figura 7-10: T=2.269 A sinistra si riporta l'intensità dell'F.F.T. della *volatilità*, a destra l'*autocorrelazione* della *volatilità* (*coefficiente di autocorrelazione* $1.2 \cdot 10^{-3}$) accompagnata dalla regressione lineare (in rosso) e da bande di confidenza distanti 2 volte l'*errore standard* (in grigio).

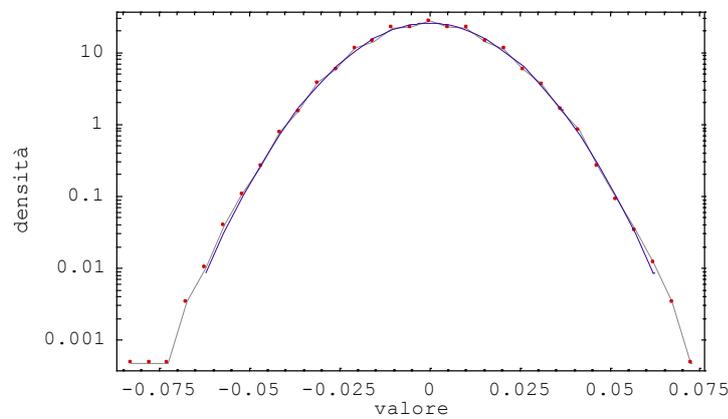


Figura 7-11: T=2.269 analisi della distribuzione dei *rendimenti* verso un fitting normale (*errore standard* 0.93, pari al 3.7% del picco della distribuzione).

In definitiva, se si è costruito un sistema che, al di sotto della temperatura critica di Ising, manifesta come desiderato la creazione di cluster di spin senza che vi sia una transizione di fase verso uno stato a magnetizzazione definita. Le configurazioni raggiunte sono tuttavia stabili, non permettendo di riscontrare le caratteristiche volute sulla distribuzione dei rendimenti¹⁸, la componente ciclica e l'autocorrelazione della volatilità¹⁹.

Per questo nel capitolo successivo modificheremo solo nel segno il campo locale dell'interazione antiferromagnetica qui studiata, arrivando a definire in modo “naturale” il modello proposto da S. Bornholdt in ‘*Expectation bubbles in a spin model of markets: intermittency from frustration across scale*’ [3].

¹⁸ Il rendimento $r(t)$ è pari all'incremento della magnetizzazione istantanea per spin $m(t)-m(t-1)$.

¹⁹ Misuriamo la volatilità tramite il valore assoluto $|r(t)|$, v.2.1.4.

8. Simulazione modello finanziario di Bornholdt

Partendo dai risultati visti nel capitolo precedente, abbiamo modificato solo nel segno il campo locale antiferromagnetico agente sullo spin k -esimo in modo che sia sempre contrario allo spin k -esimo stesso e non più alla magnetizzazione istantanea. È stato inoltre mantenuto invariato il campo che descrive l'interazione tra primi vicini, ottenendo l'interazione di S. Bornholdt [3] descritta in 4.3.2 – “Interazione *Dissipativa*”:

$$h_k = J \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j - 2 \frac{\gamma}{N} s_k \left| \sum_{i \neq k} s_i \right|$$

La magnetizzazione istantanea del modello di spin è quindi utilizzata, come già fatto nei capitoli precedenti, per riprodurre il log-prezzo di un'attività finanziaria, seguendo il modello di mercato proposto da T. Kaizoji, S. Bornholdt e Y. Fujiwara in ‘*Dynamics of price and trading volume in a spin model of stock markets with heterogeneous agents*’ [9] descritto al paragrafo 4.2

$$\log P(t) = a \sum_{i=1}^N s_i + w(t)$$

dove $w(t)$ è una componente casuale di tipo *Random Walk*. I parametri delle simulazioni sono:

- reticolo di spin 50x50 (N=2500 spin);
- reticolo iniziale scelto casualmente;
- schema di aggiornamento casuale, v. paragrafo 5.1;
- dinamica di *bagno termico*, v. paragrafi 1.4 e 5.1.1;
- 25'000 *Montecarlo Steps* prima delle misure;
- 200'000 *Montecarlo Steps* di misurazioni;

- $J=1, \alpha=0$.

Poiché il sistema non ammette Hamiltoniana, non verranno riportate le misure direttamente dipendenti dall'energia, che comunque non interviene nel modello finanziario.

8.1. Componente Random Walk nulla

Supponiamo, per acquisire la necessaria confidenza con il modello e guadagnare quanto già descritto nel lavoro di T. Kaizoji, S. Bornholdt e Y. Fujiwara [9], che la componente *Random Walk* dei prezzi $w(t)$ sia nulla e misuriamo le grandezze più significative per i seguenti valori della temperatura T e del parametro γ :

$T=0.769$	$\gamma=0$	$T=0.769$	$\gamma=2$	$T=0.769$	$\gamma=4$	$T=0.769$	$\gamma=6$	$T=0.769$	$\gamma=8$
$T=1.269$	$\gamma=0$	$T=1.269$	$\gamma=2$	$T=1.269$	$\gamma=4$	$T=1.269$	$\gamma=6$	$T=1.269$	$\gamma=8$
$T=1.769$	$\gamma=0$	$T=1.769$	$\gamma=2$	$T=1.769$	$\gamma=4$	$T=1.769$	$\gamma=6$	$T=1.769$	$\gamma=8$
$T=2.269$	$\gamma=0$	$T=2.269$	$\gamma=2$	$T=2.269$	$\gamma=4$	$T=2.269$	$\gamma=6$	$T=2.269$	$\gamma=8$
$T=2.769$	$\gamma=0$	$T=2.769$	$\gamma=2$	$T=2.769$	$\gamma=4$	$T=2.769$	$\gamma=6$	$T=2.769$	$\gamma=8$

8.1.1. Magnetizzazione

Analogamente a quanto fatto in 7.1.2, dove si è studiato l'andamento dell'energia libera in funzione della magnetizzazione, riportiamo in Figura 8-1 la densità di probabilità $p(M/N)$ misurata al variare di T e di γ .

La prima colonna, corrispondente a γ nullo, descrive il *modello di Ising* classico, ottenendo risultati compatibili con quanto già visto nel capitolo 6. Si noti, sotto la temperatura critica 2.269, la comparsa di magnetizzazione spontanea. Essendo il reticolo abbastanza esteso, l'energia di attivazione risulta così elevata da non permettere di osservare transizioni da uno stato di magnetizzazione all'altro nel corso dei 200'000 *Montecarlo Steps*, rilevando solo lo stato a magnetizzazione positiva. In prossimità della temperatura critica ($T=2.269$), l'energia di attivazione è sufficientemente piccola da permettere di vedere la formazione dei due stati di magnetizzazione. Sopra la temperatura critica, la distribuzione della magnetizzazione è vicina a quella normale.

Accendendo l'interazione *dissipativa*, come si vede nelle colonne successive, si verifica la scomparsa della magnetizzazione spontanea, registrando una distribuzione $p(M/N)$ simile a quella misurata nel capitolo precedente in 7.1.2.

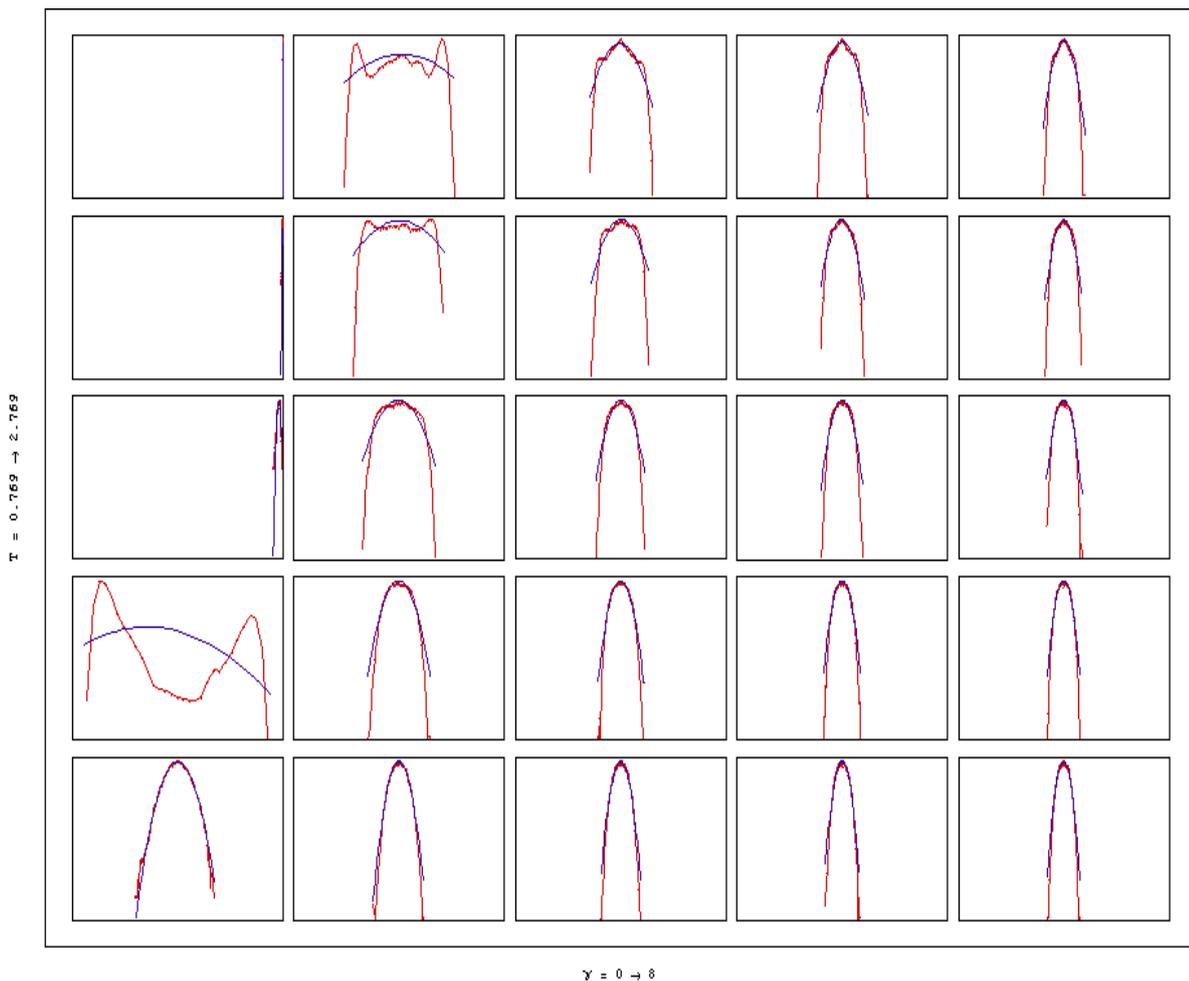


Figura 8-1 : distribuzione sperimentale della magnetizzazione $p(M/N)$ in rosso e fit normale in blu. Le ascisse coprono l'intervallo $[-1,1]$ e le ordinate sono in scala logaritmica.

8.1.2. Distribuzione dei rendimenti

Misuriamo la densità di distribuzione dei *rendimenti*²⁰ al variare della temperatura T e del parametro γ , riportando i risultati nella Figura 8-2. Notiamo che, al di sotto della temperatura critica 2.269 e per valori di γ maggiori di zero, si registra una forma qualitativamente molto vicina a quella che si vorrebbe riprodurre, di tipo leptocurtico e caratterizzata da code spesse (*fat tails*).

²⁰ Il *rendimento* $r(t)$ è pari all'incremento della magnetizzazione istantanea per spin $m(t)-m(t-1)$.

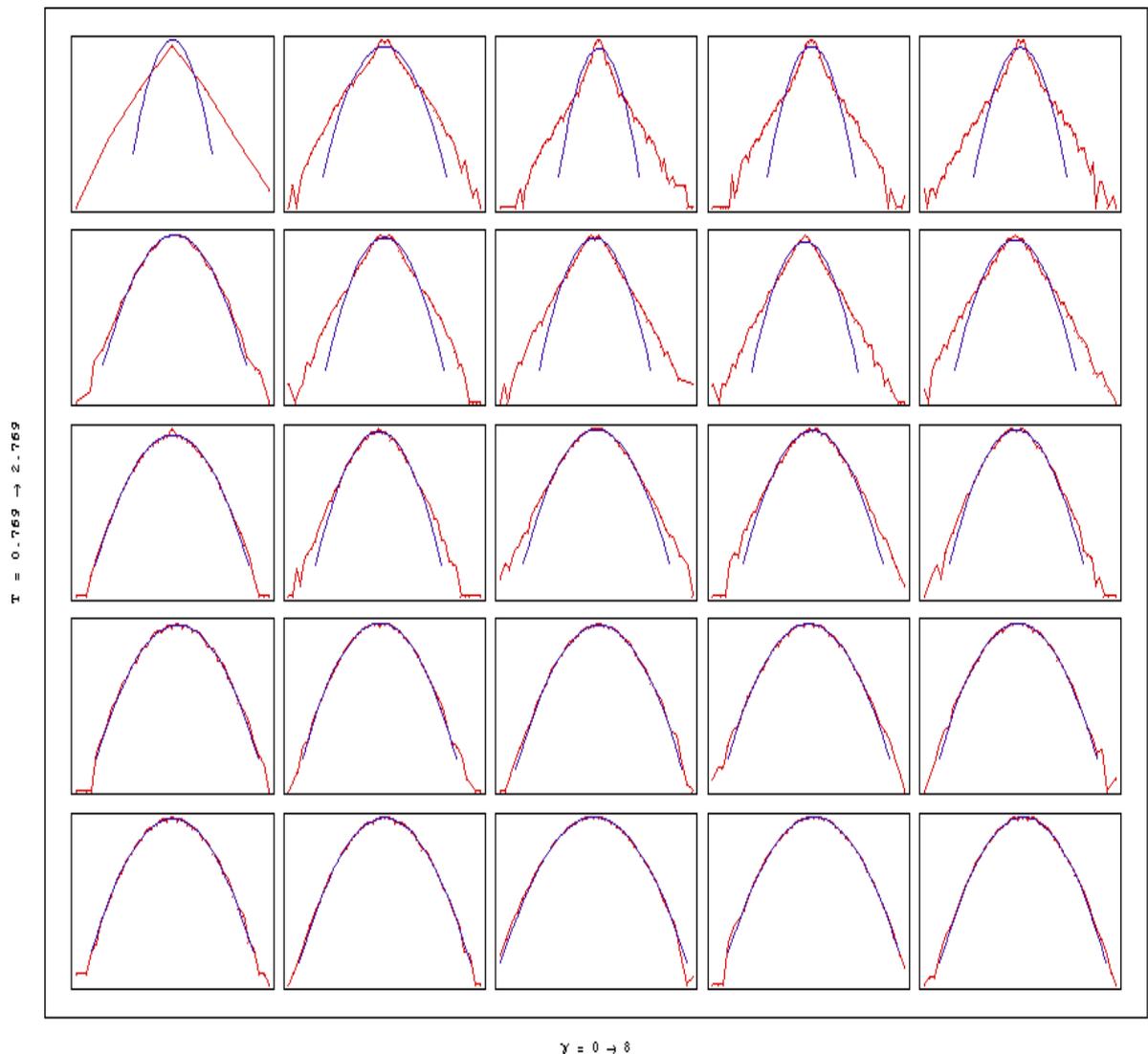


Figura 8-2: distribuzione dei *rendimenti*, in rosso, e regressione normale in blu. Non è fissata una scala comune, in quanto interessa verificare qualitativamente la forma della curva. Le ordinate sono in scala logaritmica.

Misuriamo dunque la curtosi

Kurt	$\gamma=0$	$\gamma=2$	$\gamma=4$	$\gamma=6$	$\gamma=8$
T=0.769	14.00±0.011	5.40±0.011	9.09±0.011	8.05±0.011	7.79±0.011
T=1.269	3.24±0.011	4.83±0.011	5.22±0.011	5.34±0.011	4.85±0.011
T=1.769	3.05±0.011	3.72±0.011	3.68±0.011	3.59±0.011	3.46±0.011
T=2.269	3.04±0.011	3.08±0.011	3.09±0.011	3.13±0.011	3.11±0.011
T=2.769	3.01±0.011	3.03±0.011	3.03±0.011	3.03±0.011	3.05±0.011

confermando quanto abbiamo visto qualitativamente. La forma della distribuzione è comunque sempre simmetrica

Skew ($\cdot 10^{-3}$)	$\gamma=0$	$\gamma=2$	$\gamma=4$	$\gamma=6$	$\gamma=8$
T=0.769	6.0 \pm 5.5	-6.0 \pm 5.5	40 \pm 5.5	15 \pm 5.5	45 \pm 5.5
T=1.269	3.0 \pm 5.5	-10 \pm 5.5	-2.0 \pm 5.5	49 \pm 5.5	18 \pm 5.5
T=1.769	2.0 \pm 5.5	3.0 \pm 5.5	-4.0 \pm 5.5	3.0 \pm 5.5	4.0 \pm 5.5
T=2.269	-2.0 \pm 5.5	4.0 \pm 5.5	6.0 \pm 5.5	4.0 \pm 5.5	-4.0 \pm 5.5
T=2.769	5.0 \pm 5.5	-7.0 \pm 5.5	-7.0 \pm 5.5	-4.0 \pm 5.5	2.0 \pm 5.5

mentre varia l'ampiezza della distribuzione

St.dev. ($\cdot 10^{-3}$)	$\gamma=0$	$\gamma=2$	$\gamma=4$	$\gamma=6$	$\gamma=8$
T=0.769	0.20 \pm 0.0003	12.4 \pm 0.020	9.0 \pm 0.014	10.3 \pm 0.016	10.8 \pm 0.017
T=1.269	2.2 \pm 0.003	12.5 \pm 0.020	12.6 \pm 0.020	13.1 \pm 0.021	14.3 \pm 0.023
T=1.769	6.5 \pm 0.010	14.5 \pm 0.023	16.2 \pm 0.026	17.5 \pm 0.028	18.6 \pm 0.029
T=2.269	14.6 \pm 0.023	19.0 \pm 0.030	20.2 \pm 0.032	21.1 \pm 0.033	21.8 \pm 0.034
T=2.769	20.6 \pm 0.033	21.7 \pm 0.034	22.4 \pm 0.035	22.9 \pm 0.036	23.3 \pm 0.037

diminuendo al diminuire della temperatura. Per i nostri fini, comunque, l'ampiezza della distribuzione non è rilevante in quanto è possibile riportarla, tramite un *fattore di scala*, al valore richiesto senza alterare le altre grandezze.

La media della distribuzione, comparata con l'errore, è sempre nulla

Mean ($\cdot 10^{-6}$)	$\gamma=0$	$\gamma=2$	$\gamma=4$	$\gamma=6$	$\gamma=8$
T=0.769	0.0 \pm 0.4	1.3 \pm 27.7	0.0 \pm 20.1	0.3 \pm 23.0	0.4 \pm 24.1
T=1.269	0.0 \pm 4.9	2.7 \pm 28.0	-0.4 \pm 28.2	-0.4 \pm 29.3	0.6 \pm 32.0
T=1.769	0.1 \pm 14.5	-1.6 \pm 32.4	0.3 \pm 36.2	-0.3 \pm 39.1	0.0 \pm 41.6
T=2.269	-6.0 \pm 32.6	0.5 \pm 42.5	0.5 \pm 45.2	-0.1 \pm 47.2	-0.2 \pm 48.7
T=2.769	0.7 \pm 46.1	0.6 \pm 48.5	0.2 \pm 50.1	0.3 \pm 51.2	-0.3 \pm 52.1

precisando che l'errore riportato nelle misure di tutti i momenti centrali discende dall'approssimazione normale, e come tale si deve considerare solo indicativamente.

8.1.3. Stabilità

Viene stimato l'esponente di stabilità 2.2.3 seguendo il metodo già visto in 3.2, ovvero tramite la regressione lineare del logaritmo del massimo della densità di distribuzione dei rendimenti di periodo²¹ T verso il logaritmo di T.

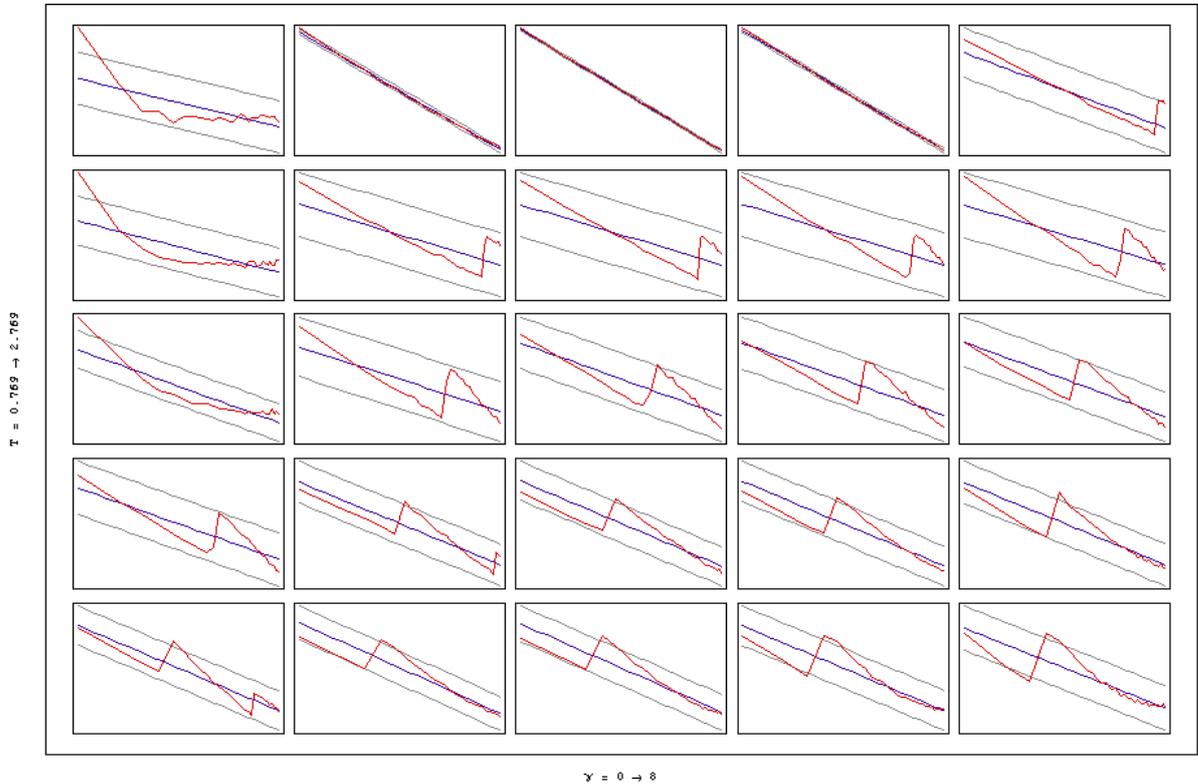


Figura 8-3: Stabilità. Regressione tra il logaritmo del massimo della densità di distribuzione dei rendimenti di periodo T verso il logaritmo di T. La distribuzione è calcolata con passi s.q.m./50 ed è normalizzata interpolando linearmente i valori. I dati sperimentali sono indicati in rosso, la regressione in blu per T=1,...,30, riportando bande di confidenza distanti 2 volte l'errore standard in grigio. La scala è libera.

Dal coefficiente angolare della regressione, segue la stima dell'esponente di stabilità:

stabilità	$\gamma=0$	$\gamma=2$	$\gamma=4$	$\gamma=6$	$\gamma=8$
T=0.769	118.±23.9	2.38±0.02	2.11±0.01	2.17±0.01	2.86±0.35
T=1.269	19.8±3.51	4.10±0.81	4.24±0.85	4.68±0.93	5.28±1.07
T=1.769	7.72±0.74	4.73±0.81	3.83±0.51	3.55±0.48	3.50±0.43
T=2.269	3.90±0.54	2.57±0.24	2.44±0.21	2.95±0.26	3.51±0.33
T=2.769	2.68±0.23	2.31±0.16	2.78±0.21	3.60±0.32	4.55±0.47

²¹ Il rendimento di periodo T è pari alla differenza di magnetizzazione istantanea per spin $m(t)-m(t-T)$.

La misura dell'*esponente di stabilità* risente del fatto che la magnetizzazione per spin è limitata nell'intervallo $[-1,1]$ e questo, su scala temporale sufficientemente ampia, porta a violare la stabilità della distribuzione, come si vede dall'andamento "a zig zag" riportato in Figura 8-3. Possiamo quindi concludere che il solo modello di spin non è adeguato a simulare il comportamento voluto, come d'altra parte ci si aspettava dai ragionamenti fatti precedentemente in 4.2. Per questo terremo conto esplicitamente, nel corso del successivo paragrafo 8.2, del contributo della componente *Random Walk*.

8.1.4. Autocorrelazione e ciclicità

L'*autocorrelazione*²² della *volatilità*²³ viene studiata tramite una variante del metodo illustrato in 2.3. Poiché nei risultati sono presenti valori di *autocorrelazione* negativa, non è possibile il calcolo del logaritmo. Per questo abbiamo deciso di procedere, come d'altra parte è comune in finanza, alla regressione dell'*autocorrelazione* semplice di ritardo L verso il ritardo L stesso, rinunciando alla misura dell'*esponente di decadimento*.

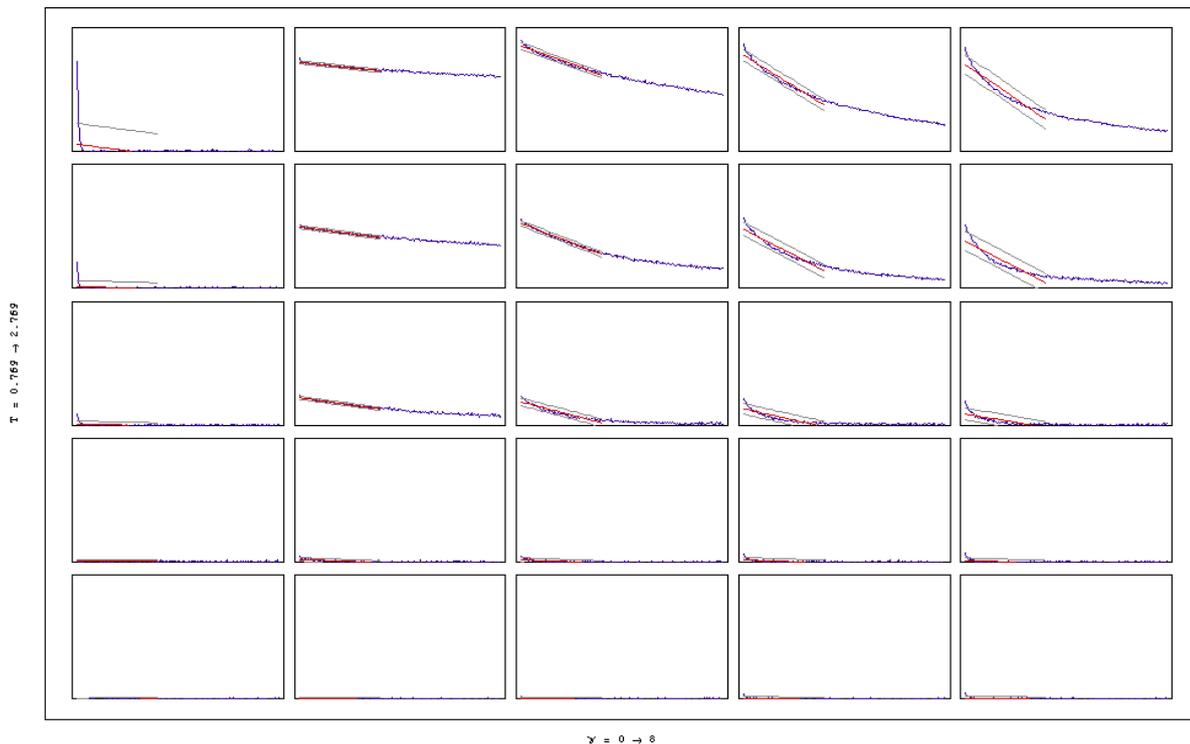


Figura 8-4: *autocorrelazione* della *volatilità*, in blu, e regressione lineare in rosso dei primi 80 valori, bande di confidenza distanti 2 volte l'*errore standard* in grigio. La scala delle ordinate è lineare tra 0 e 0.4.

²² Data una serie storica $v(t)$, l'*autocorrelazione* di ritardo L è la correlazione lineare tra $v(t)$ e $v(t-L)$, v. 2.3.

²³ Misuriamo la *volatilità* tramite il valore assoluto $|m(t)-m(t-1)|$, v. 2.1.4.

Il *coefficiente di autocorrelazione* è pari all'intercetta della regressione. Osserviamo che l'*autocorrelazione* della *volatilità* sale al diminuire della temperatura, e presenta un massimo per $\gamma = 4$:

autocorr	$\gamma=0$	$\gamma=2$	$\gamma=4$	$\gamma=6$	$\gamma=8$
T=0.769	$22.9 \cdot 10^{-3} \pm 7.6 \cdot 10^{-3}$	$287 \cdot 10^{-3} \pm 0.59 \cdot 10^{-3}$	$339 \cdot 10^{-3} \pm 1.1 \cdot 10^{-3}$	$311 \cdot 10^{-3} \pm 2.0 \cdot 10^{-3}$	$281 \cdot 10^{-3} \pm 3.4 \cdot 10^{-3}$
T=1.269	$6.20 \cdot 10^{-3} \pm 2.2 \cdot 10^{-3}$	$198 \cdot 10^{-3} \pm 0.59 \cdot 10^{-3}$	$209 \cdot 10^{-3} \pm 0.94 \cdot 10^{-3}$	$192 \cdot 10^{-3} \pm 2.4 \cdot 10^{-3}$	$153 \cdot 10^{-3} \pm 3.4 \cdot 10^{-3}$
T=1.769	$3.90 \cdot 10^{-3} \pm 1.0 \cdot 10^{-3}$	$88.7 \cdot 10^{-3} \pm 0.55 \cdot 10^{-3}$	$75.3 \cdot 10^{-3} \pm 1.4 \cdot 10^{-3}$	$53.0 \cdot 10^{-3} \pm 1.9 \cdot 10^{-3}$	$36.3 \cdot 10^{-3} \pm 2.1 \cdot 10^{-3}$
T=2.269	$3.00 \cdot 10^{-3} \pm 0.43 \cdot 10^{-3}$	$8.90 \cdot 10^{-3} \pm 0.67 \cdot 10^{-3}$	$7.40 \cdot 10^{-3} \pm 0.79 \cdot 10^{-3}$	$7.30 \cdot 10^{-3} \pm 0.91 \cdot 10^{-3}$	$5.30 \cdot 10^{-3} \pm 0.97 \cdot 10^{-3}$
T=2.769	$-0.84 \cdot 10^{-3} \pm 0.44 \cdot 10^{-3}$ 3	$0.65 \cdot 10^{-3} \pm 0.59 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-3} \pm 0.52 \cdot 10^{-3}$	$2.90 \cdot 10^{-3} \pm 0.67 \cdot 10^{-3}$	$3.00 \cdot 10^{-3} \pm 0.78 \cdot 10^{-3}$

Continuando con l'analisi della *volatilità*, vediamo che la F.F.T.²⁴ evidenzia la presenza di componenti cicliche dominanti di tipo "*infrarosso*", ovvero di lungo periodo, che si sviluppano al di sotto della temperatura critica 2.269 e per γ maggiore di zero.

²⁴ Si riporta l'intensità della Fast Fourier Transform della *volatilità*.

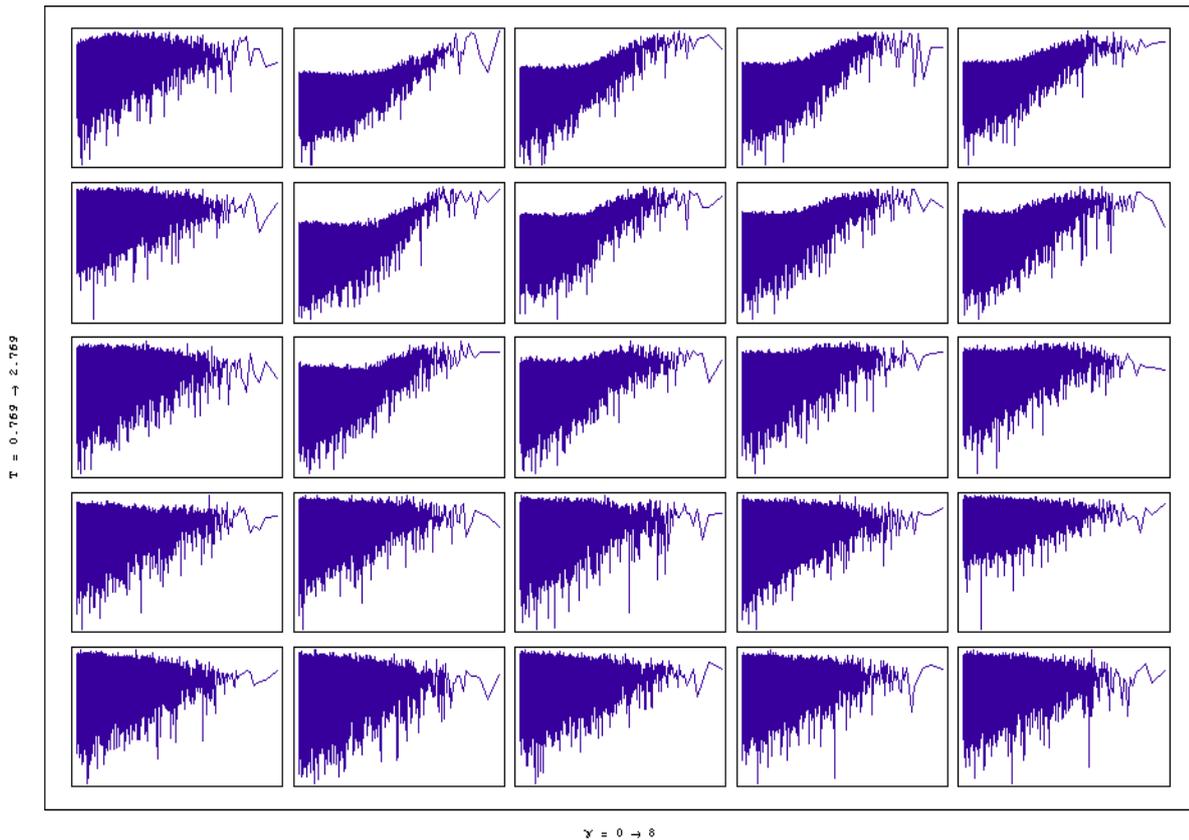


Figura 8-5: F.F.T. della *volatilità*. In ascissa è riportato il periodo (da 1 a 200'000, scala logaritmica), in ordinata il logaritmo dell'intensità.

Le peculiarità di comportamento della *volatilità* che abbiamo rilevato discendono dalla formazione di stati metastabili che permangono per qualche migliaio di *Montecarlo Steps*, disgregandosi per poi riformarsi rapidamente nel giro di qualche centinaio di passi.

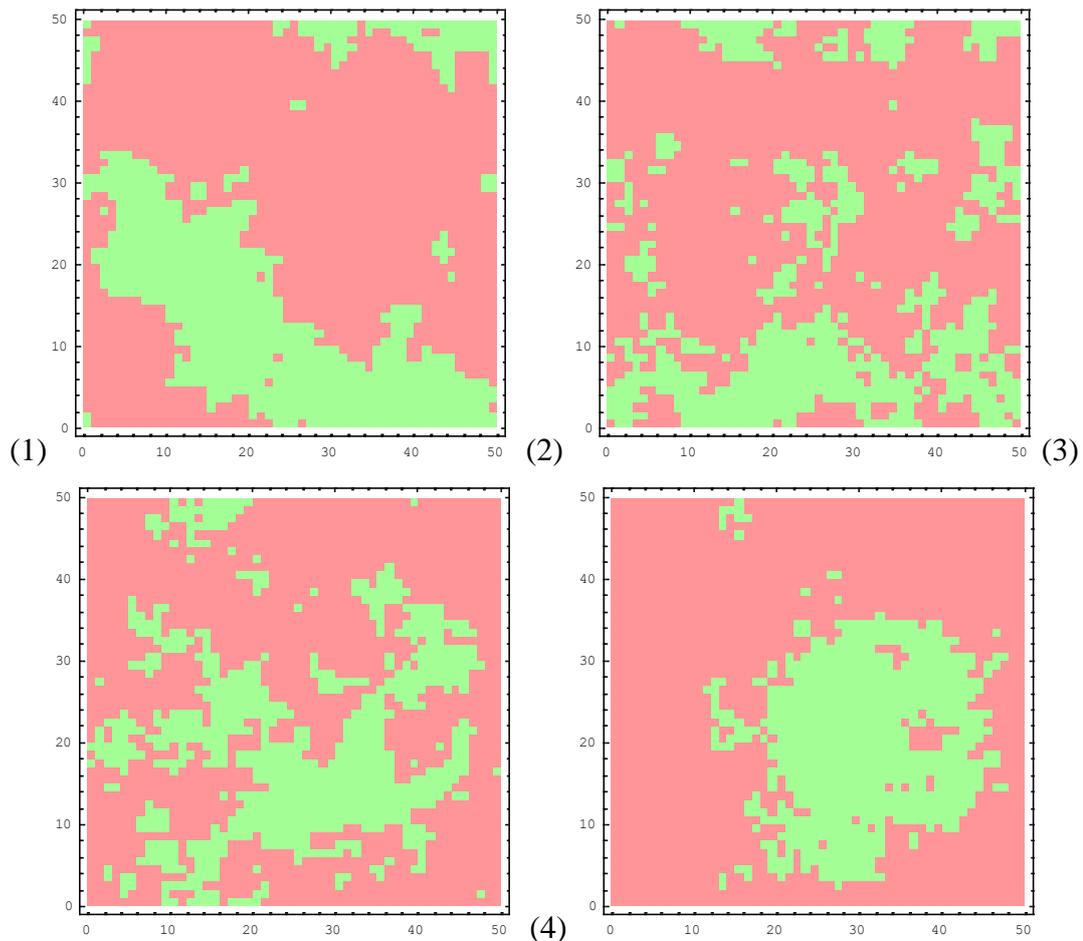


Figura 8-6: $T=0869$, $\gamma = 2$, da in alto a sinistra: uno stato metastabile (1) si disgrega molto rapidamente (2) (3) in 300 *Montecarlo Steps* dando luogo ad un nuovo stato metastabile (4) che “fluttua” per qualche migliaia di *Montecarlo Steps* tornando quindi a disgregarsi. Il fenomeno si ripete all’infinito.

8.2. Modello completo (reticolo + Random Walk)

Preso confidenza con l’output del modello costituito dal solo reticolo di spin, “accendiamo” adesso la componente *Random Walk* $W(t)$ producendola come descritto in 4.2:

- si genera un andamento $W_o(t)$ tale che $W_o(t) - W_o(t-1)$ siano indipendenti, normalmente distribuiti con media nulla e la stessa varianza della serie prodotta dal modello di spin (l’incidenza sui *rendimenti* degli *investitori tecnici* è così equiparata all’incidenza degli *investitori fondamentalisti*);
- si calcola la media mobile a 60 periodi di $W_o(t)$ ottenendo $W(t)$, rendendo conto della lenta variabilità delle grandezze fondamentali (i bilanci delle aziende, per esempio, sono rilasciati con cadenza trimestrale).

Ci aspettiamo che la serie storica dei log-prezzi sia caratterizzata da *rendimenti* distribuiti senza variazioni rispetto a quanto visto nel paragrafo precedente, dove $W(t)=0$. Infatti, la media mobile opera come un filtro che attenua solo le frequenze più elevate. Il contributo di $W(t)$ è invece atteso su scala più ampia, rilevabile tramite l'analisi della stabilità.

8.2.1. Distribuzione dei rendimenti

Come anticipato, l'analisi della distribuzione dei *rendimenti*²⁵ non evidenzia sostanziali differenze rispetto a quanto già visto in assenza della componente *Random Walk*.

Kurt	$\gamma=0$	$\gamma=2$	$\gamma=4$	$\gamma=6$	$\gamma=8$
T=0.769	13.9±0.011	5.39±0.011	9.06±0.011	8.02±0.011	7.76±0.011
T=1.269	3.24±0.011	4.82±0.011	5.21±0.011	5.32±0.011	4.84±0.011
T=1.769	3.05±0.011	3.71±0.011	3.67±0.011	3.59±0.011	3.46±0.011
T=2.269	3.04±0.011	3.08±0.011	3.09±0.011	3.13±0.011	3.11±0.011
T=2.769	3.01±0.011	3.03±0.011	3.03±0.011	3.03±0.011	3.05±0.011

Skew ($\cdot 10^{-3}$)	$\gamma=0$	$\gamma=2$	$\gamma=4$	$\gamma=6$	$\gamma=8$
T=0.769	5±5.5	2±5.5	43±5.5	-15±5.5	-46±5.5
T=1.269	3±5.5	-12±5.5	-1±5.5	50±5.5	18±5.5
T=1.769	2±5.5	4±5.5	-2±5.5	5±5.5	3±5.5
T=2.269	-1±5.5	4±5.5	6±5.5	4±5.5	-4±5.5
T=2.769	5±5.5	-7±5.5	-7±5.5	-4±5.5	2±5.5

St.dev. ($\cdot 10^{-3}$)	$\gamma=0$	$\gamma=2$	$\gamma=4$	$\gamma=6$	$\gamma=8$
T=0.769	0.2±0.0003	12.4±0.020	9.0±0.014	10.3±0.016	10.9±0.017
T=1.269	2.2±0.030	12.5±0.020	12.6±0.020	13.1±0.021	14.3±0.023
T=1.769	6.5±0.010	14.5±0.023	16.2±0.026	17.5±0.028	18.6±0.029
T=2.269	14.6±0.023	19.1±0.030	20.3±0.032	21.2±0.034	21.9±0.035
T=2.769	20.6±0.033	21.7±0.034	22.4±0.035	23.0±0.036	23.4±0.037

Mean ($\cdot 10^{-6}$)	$\gamma=0$	$\gamma=2$	$\gamma=4$	$\gamma=6$	$\gamma=8$
T=0.769	-0.3±0.4	3.8±27.7	22±20.1	12±23.0	-5.9±24.4
T=1.269	2.0±4.9	-32±28.0	0.3±28.2	-41±29.3	-84±32.0
T=1.769	-11±14.5	-18±32.4	-53±36.2	41±39.1	9.0±41.6

²⁵ I *rendimenti* $r(t)$ dei prezzi del modello completo sono $\log P(t) - \log P(t-1)$, cioè $m(t)-m(t-1)+W(t)-W(t-1)$.

T=2.269	20±32.6	43±42.7	17±45.4	63±47.4	-43±49.0
T=2.769	-0.9±46.1	110±48.5	35±50.1	9.1±51.4	-47±52.3

Anche qualitativamente la forma della distribuzione non varia in modo apprezzabile

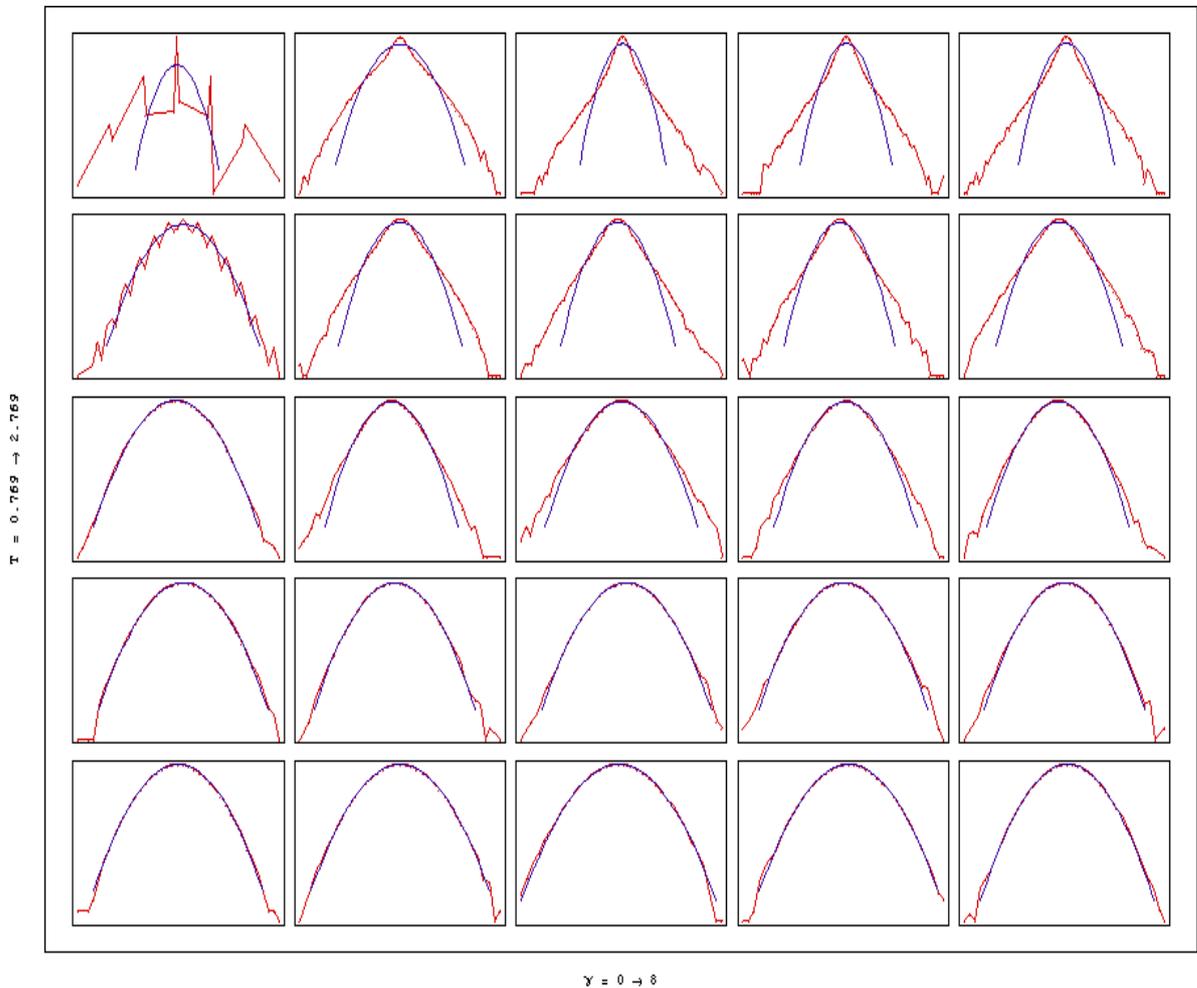


Figura 8-7: distribuzione dei *rendimenti*, in rosso, e regressione normale in blu. Non è fissata una scala comune, in quanto interessa verificare qualitativamente la forma della curva. Le ordinate sono in scala logaritmica. Per $\gamma = 0$ e T minore di 2.269 si notano gli effetti della discretizzazione nella forma irregolare.

continuando ad evidenziare, sotto la temperatura critica 2.269 e per γ non nullo, un andamento leptocurtico e la formazione di code spesse (*fat tails*).

8.2.2. Stabilità

Come atteso, l'introduzione di $w(t)$ ha modificato le misure della stabilità, portando al rispetto della legge di scala. La Figura 8-8 non evidenzia più (cfr. par. 8.1) la presenza degli andamenti spezzati, "a zig zag", che abbiamo visto formarsi senza il contributo della componente *Random Walk*.

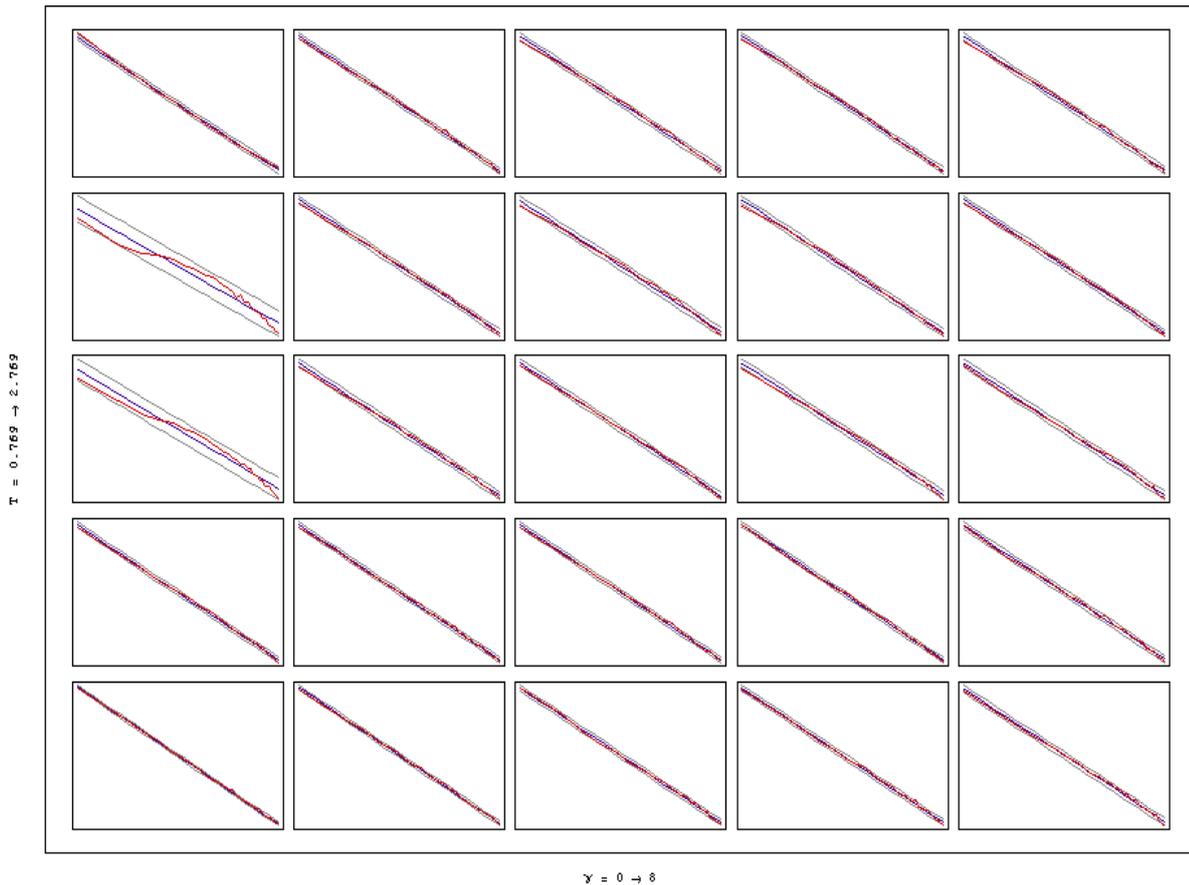


Figura 8-8: Stabilità. Regressione tra il logaritmo del massimo della densità di distribuzione dei *rendimenti* di periodo T verso il logaritmo di T . La distribuzione è calcolata con passi s.q.m./50 ed è normalizzata interpolando linearmente i valori. I dati sperimentali sono indicati in rosso, la regressione in blu per $T=1, \dots, 30$, riportando bande di confidenza distanti 2 volte l'*errore standard* in grigio. La scala è libera.

stabilità	$\gamma=0$	$\gamma=2$	$\gamma=4$	$\gamma=6$	$\gamma=8$
T=0.769	1.08±0.01	1.75±0.01	1.63±0.02	1.65±0.01	1.64±0.02
T=1.269	2.25±0.09	1.83±0.02	1.80±0.02	1.80±0.02	1.84±0.02
T=1.769	2.44±0.08	1.93±0.02	1.97±0.02	2.00±0.02	2.05±0.02
T=2.269	1.96±0.02	1.99±0.02	2.06±0.02	2.15±0.01	2.21±0.02
T=2.769	1.96±0.01	2.09±0.01	2.20±0.02	2.26±0.02	2.39±0.02

Si può inoltre vedere dalla tabella precedente che l'*esponente di stabilità* è compatibile con la distribuzione normale (stabilità pari a 2) per T maggiore della temperatura critica 2.269, mentre al di sotto di tale valore, l'*esponente di stabilità* scende assieme alla temperatura.

8.2.3. Autocorrelazione e ciclicità

L'*autocorrelazione* della *volatilità* non evidenzia sostanziali differenze rispetto a quanto visto in assenza della componente *Random Walk* al paragrafo 8.1.4.

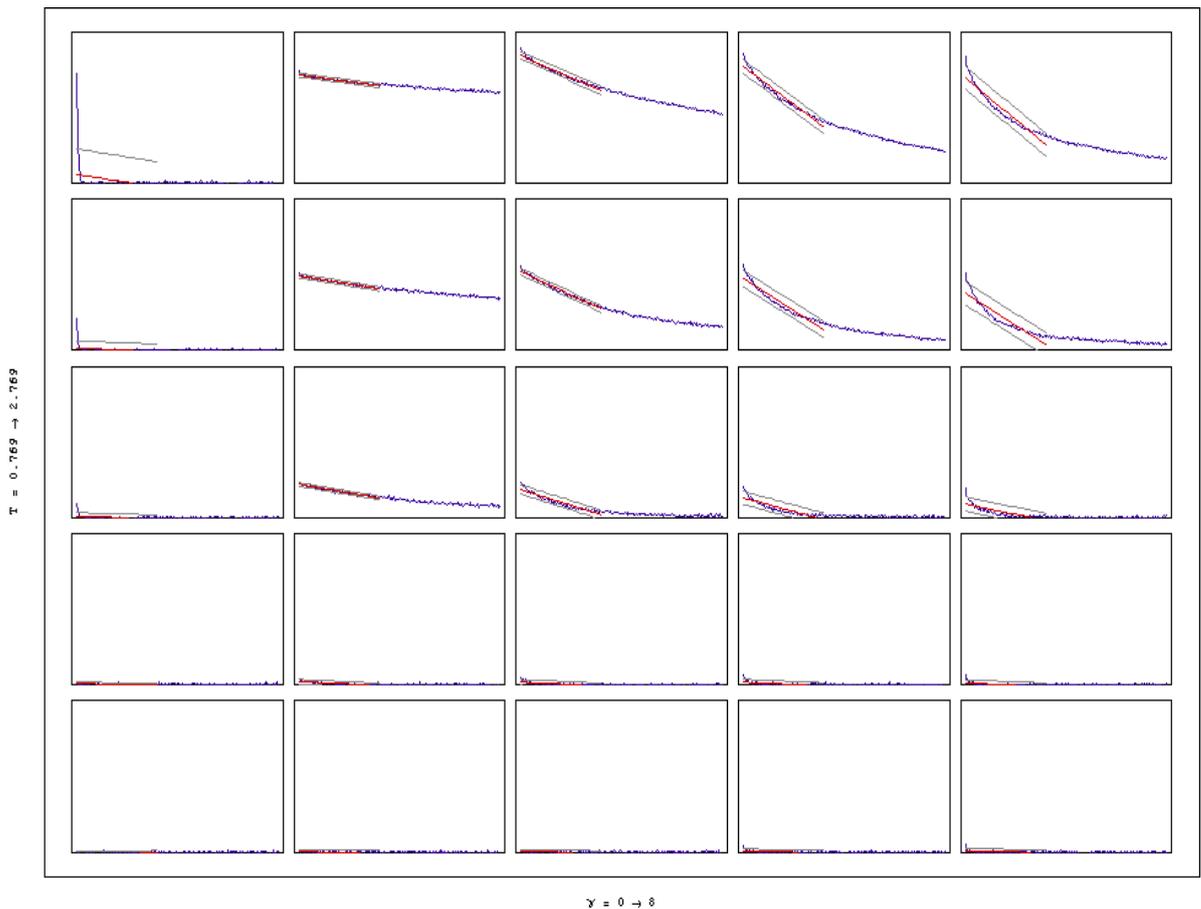


Figura 8-9: autocorrelazione della *volatilità*, in blu, e regressione lineare in rosso dei primi 80 valori, bande di confidenza distanti 2 volte l'*errore standard* in grigio. La scala delle ordinate è lineare tra 0 e 0.4.

autocorr	$\gamma=0$	$\gamma=2$	$\gamma=4$	$\gamma=6$	$\gamma=8$
T=0.769	$26.3 \cdot 10^{-3} \pm 7.6 \cdot 10^{-3}$	$278 \cdot 10^{-3} \pm 0.57 \cdot 10^{-3}$	$332 \cdot 10^{-3} \pm 1.6 \cdot 10^{-3}$	$304 \cdot 10^{-3} \pm 2.1 \cdot 10^{-3}$	$274 \cdot 10^{-3} \pm 3.3 \cdot 10^{-3}$
T=1.269	$5.80 \cdot 10^{-3} \pm 1.9 \cdot 10^{-3}$	$192 \cdot 10^{-3} \pm 0.56 \cdot 10^{-3}$	$203 \cdot 10^{-3} \pm 0.93 \cdot 10^{-3}$	$187 \cdot 10^{-3} \pm 2.4 \cdot 10^{-3}$	$147 \cdot 10^{-3} \pm 3.3 \cdot 10^{-3}$
T=1.769	$3.30 \cdot 10^{-3} \pm 0.93 \cdot 10^{-3}$	$85.9 \cdot 10^{-3} \pm 0.54 \cdot 10^{-3}$	$72.8 \cdot 10^{-3} \pm 1.3 \cdot 10^{-3}$	$50.9 \cdot 10^{-3} \pm 1.8 \cdot 10^{-3}$	$35.2 \cdot 10^{-3} \pm 2.0 \cdot 10^{-3}$
T=2.269	$2.90 \cdot 10^{-3} \pm 0.43 \cdot 10^{-3}$	$8.50 \cdot 10^{-3} \pm 0.65 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-3} \pm 0.76 \cdot 10^{-3}$	$6.60 \cdot 10^{-3} \pm 0.85 \cdot 10^{-3}$	$5.00 \cdot 10^{-3} \pm 0.89 \cdot 10^{-3}$

T=2.769	$-1.10 \cdot 10^{-3} \pm 0.44 \cdot 10^{-3}$ 3	$0.47 \cdot 10^{-3} \pm 0.59 \cdot 10^{-3}$	$0.80 \cdot 10^{-3} \pm 0.52 \cdot 10^{-3}$	$2.20 \cdot 10^{-3} \pm 0.65 \cdot 10^{-3}$	$2.60 \cdot 10^{-3} \pm 0.74 \cdot 10^{-3}$
----------------	---	---	---	---	---

Neppure l’F.F.T. evidenzia differenze qualitative apprezzabili nell’intensità dello spettro.

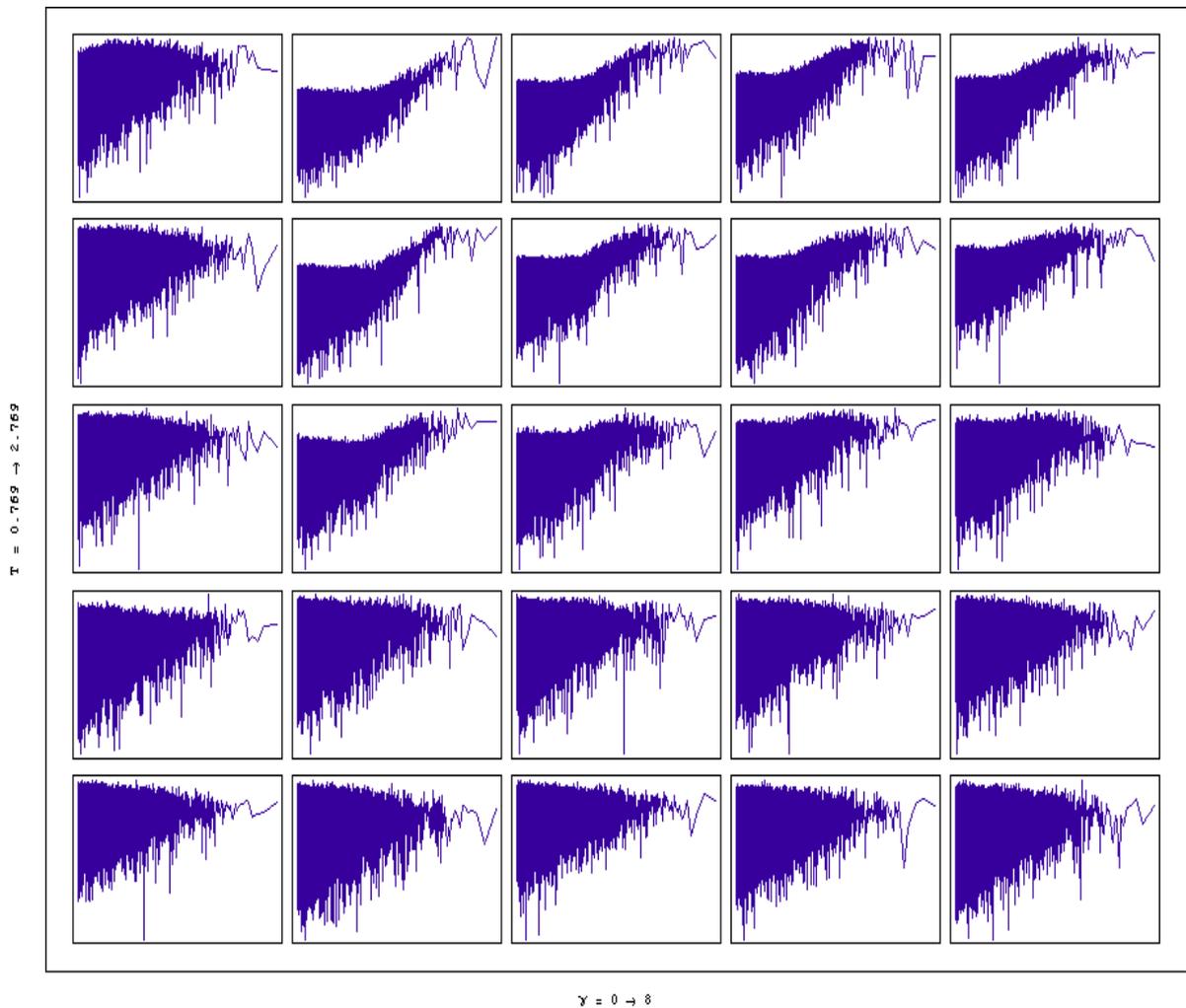


Figura 8-10: F.F.T. della *volatilità*. In ascissa è riportato il periodo (da 1 a 200'000, scala logaritmica), in ordinata il logaritmo dell’intensità.

In definitiva, l’introduzione della componente *Random Walk* $W(t)$, caratterizzata da uno spettro di frequenze “*infrarosso*” rispetto all’andamento della magnetizzazione del reticolo, è fondamentale per riprodurre un andamento dei prezzi non limitato a priori e distribuzioni dei *rendimenti* stabili.

8.3. S&P 500 simulato

Studiamo i risultati di una simulazione del modello completo (comprensivo della componente *Random Walk*) caratterizzato dai parametri del precedente paragrafo 8.2, restringendo l'analisi ad una coppia (temperatura T , γ) tale da riprodurre grandezze simili a quanto visto per l'indice S&P 500 nel capitolo 3. La temperatura è fissata a $T=1.269$, per avere un *esponente di stabilità* prossimo a 1.87 (v. tabella 8.2.2); γ viene quindi scelto pari ad 8 per ottenere un *coefficiente di autocorrelazione della volatilità* prossimo a 0.179 (v. tabella 8.2.3).

8.3.1. Prezzi e rendimenti

L'andamento dei prezzi simulato dal modello è

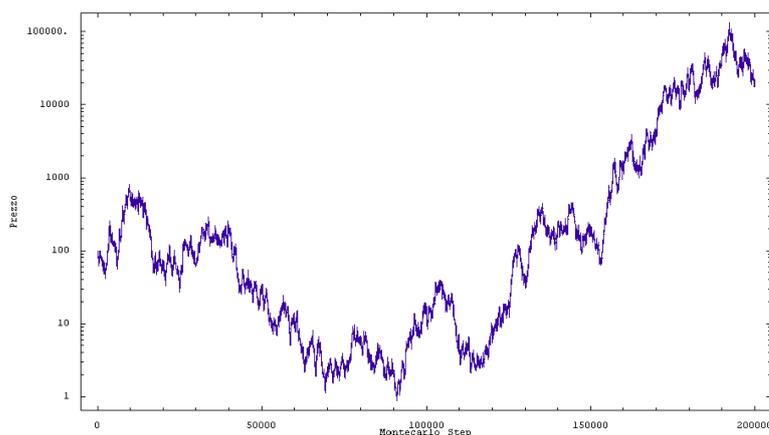


Figura 8-11: andamento dei prezzi simulato, scala logaritmica.

il quale origina i *rendimenti*

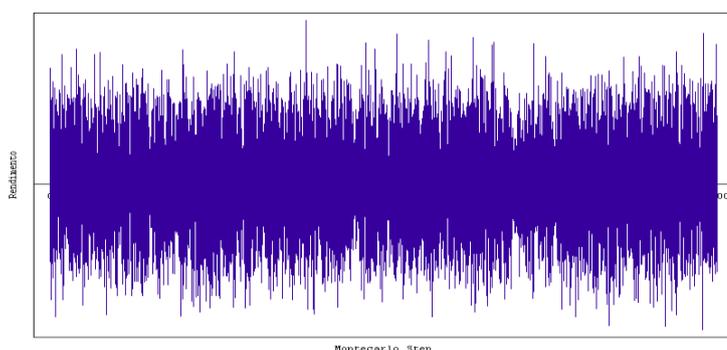


Figura 8-12: rendimenti ad un periodo.

caratterizzati dalla statistica:

Campioni	Media	Dev. St.	Asimmetria	Curtosi
199'999	$27.2 \cdot 10^{-6} \pm 32 \cdot 10^{-6}$	$14.39 \cdot 10^{-3} \pm 27 \cdot 10^{-6}$	0.018 ± 0.0055	4.78 ± 0.011

Per riportare la deviazione standard della simulazione a $9.732 \cdot 10^{-3}$, rilevata per l'indice S&P 500, è sufficiente moltiplicare i log-prezzi per il rapporto delle deviazioni standard. Naturalmente non variano tutte le altre grandezze di nostro interesse. La nuova statistica è dunque:

Campioni	Media	Dev. St.	Asimmetria	Curtosi
199'999	$18.4 \cdot 10^{-6} \pm 22 \cdot 10^{-6}$	$9.732 \cdot 10^{-3} \pm 15 \cdot 10^{-6}$	0.018 ± 0.0055	4.78 ± 0.011

8.3.2. Stabilità

La misura del coefficiente di stabilità di Lévy, condotta secondo il metodo indicato in 2.2.2, ovvero calcolando il coefficiente angolare della regressione tra il logaritmo del massimo della densità di distribuzione dei *rendimenti* di periodo T ed il logaritmo del periodo T, per T che varia tra 1 e 30 periodi, porge:

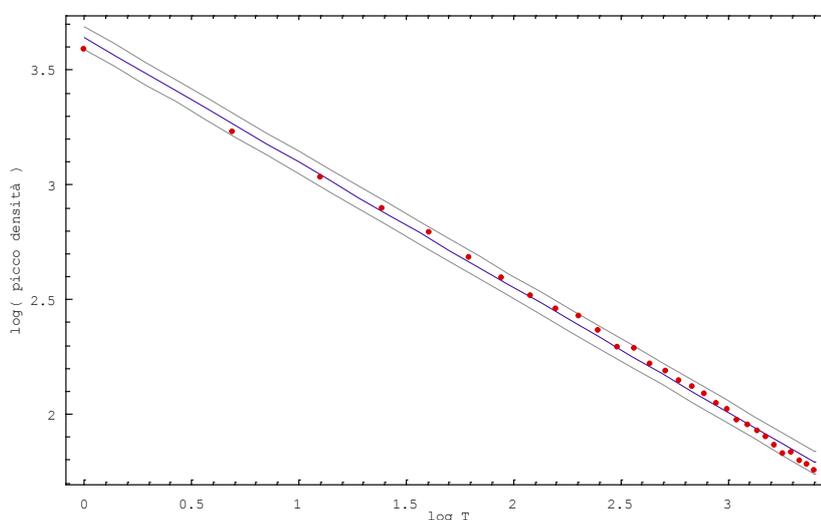


Figura 8-13: Stabilità. Regressione tra il logaritmo del massimo della densità di distribuzione dei *rendimenti* di periodo T verso il logaritmo di T. La distribuzione è calcolata con passi s.q.m./50 ed è normalizzata interpolando linearmente i valori. I dati sperimentali sono indicati in rosso, la regressione in blu per T=1,...,30, riportando bande di confidenza distanti 2 volte l'*errore standard* in grigio.

L'*esponente di stabilità* misurato, $\alpha = 1.83 \pm 0.02$, è vicino a quanto rilevato per l'S&P 500, $\alpha = 1.87 \pm 0.02$.

8.3.3. Distribuzione

Consideriamo i *rendimenti* di periodo $T=1$ dei prezzi generati, calcolando:

- la distribuzione sperimentale;
- la distribuzione di Lévy avente l'*esponente di stabilità* $\alpha=1.83$ prima calcolato ed il *fattore di scala* pari a $90 \cdot 10^{-9}$ ricavato da un'interpolazione²⁶;
- la distribuzione normale avente la media e la varianza dei *rendimenti*.

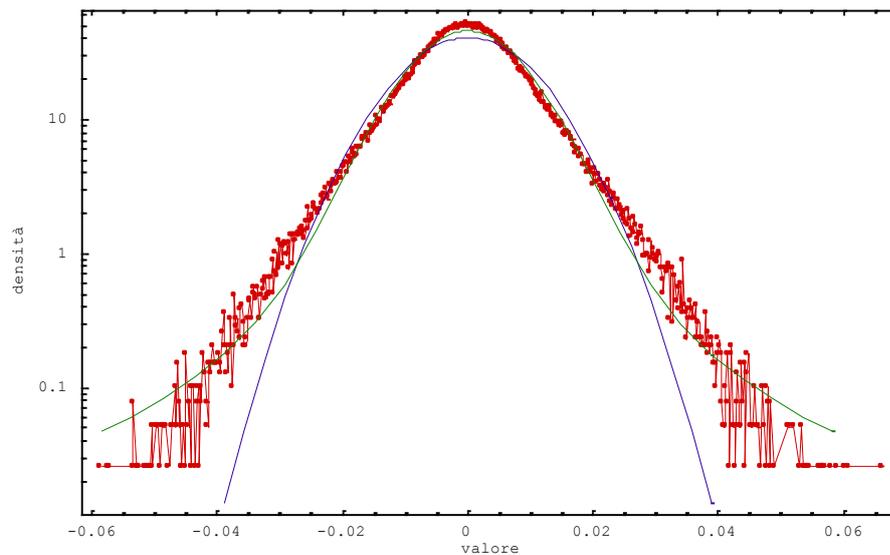


Figura 8-14: distribuzione dei *rendimenti* dei prezzi generati (in rosso), intervallo di campionamento s.q.m./50, interpolazione lineare dei punti. Distribuzione di Lévy $\alpha=1.83$ ed $a=90 \cdot 10^{-9}$ in verde (è disegnato l'intervallo $\pm 7\sigma$), distribuzione normale con la stessa media e varianza dei *rendimenti* in blu (è disegnato l'intervallo $\pm 4\sigma$).

L'*errore standard*²⁷ del fitting è pari a 1.68 per la distribuzione di Lévy (il 3.2% del picco della densità pari a 52), 3.60 per la distribuzione di Gauss (il 6.9% del picco della densità).

²⁶ La curva di Lévy non è analiticamente esprimibile, v. 2.2.2, rendendo molto lunga l'interpolazione a due parametri. Per questo viene dapprima calcolato l'*esponente di stabilità* ed in seguito interpolato il solo parametro di scala.

²⁷ L'*errore standard* è la radice quadrata della media degli scarti quadratici tra la curva d'interpolazione ed i dati sperimentali.

Concludiamo lo studio della distribuzione confrontando qualitativamente in Figura 8-15 i risultati ottenuti con quanto rilevato sperimentalmente per l'indice S&P 500 nel paragrafo 3.3, evidenziando un'ottima corrispondenza.

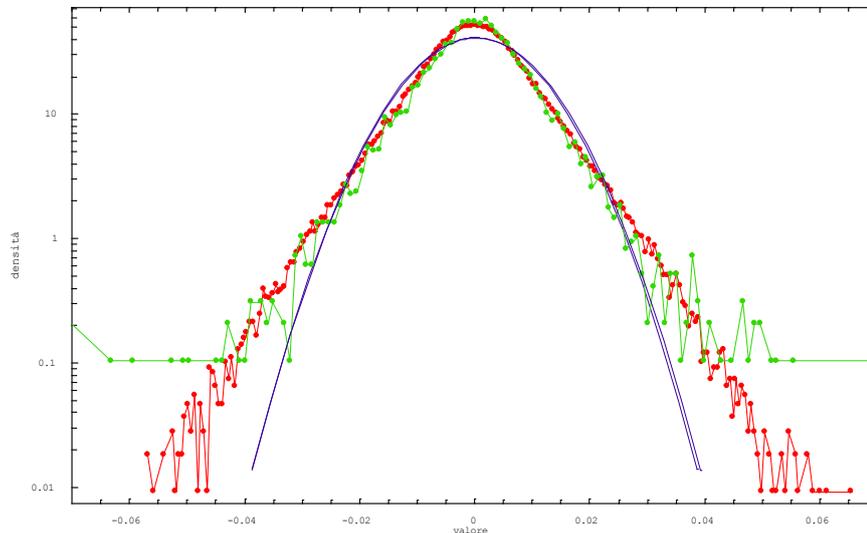


Figura 8-15: distribuzione dei rendimenti dei prezzi generati dal modello finanziario, in rosso, e di quelli rilevati per l'S&P 500, in verde, , intervallo di campionamento s.q.m./50, interpolazione lineare dei punti. In blu si riporta il fitting normale (è disegnato l'intervallo $\pm 4\sigma$).

8.3.4. Cluster ed autocorrelazione

L'analisi dell'F.F.T. della *volatilità* evidenzia la presenza di componenti cicliche di lungo periodo, presentando una figura molto simile a quella rilevata sperimentalmente per l'indice S&P 500.

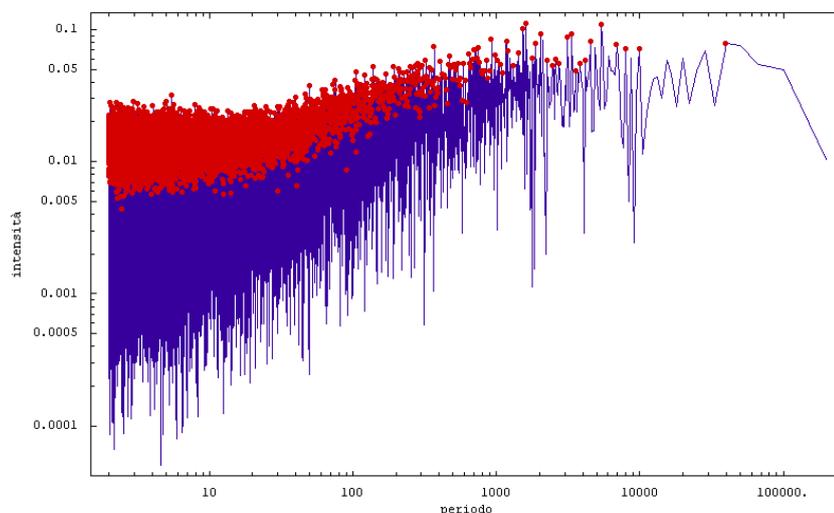


Figura 8-16: intensità dell'F.F.T. della *volatilità*, in blu; in rosso sono segnati i massimi più importanti (separati a destra e a sinistra da almeno 3 valori più piccoli).

L'autocorrelazione della volatilità

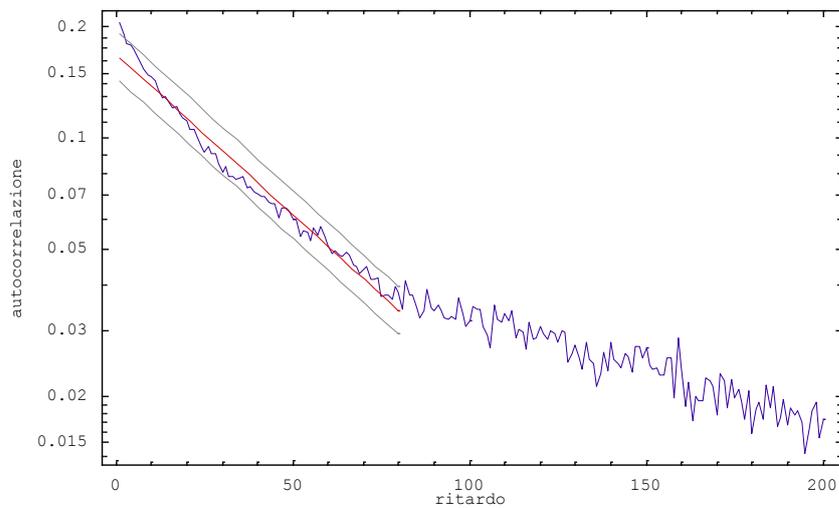


Figura 8-17: autocorrelazione della volatilità in blu, scala logaritmica delle ascisse. In rosso è riportata la regressione lineare dei logaritmi (ritardo massimo 80 *Montecarlo Step*) con bande di confidenza distanti due volte l'errore standard in grigio.

permette il calcolo, tramite una regressione dei logaritmi di correlazione verso il ritardo L , del *coefficiente di correlazione*, pari a 0.162 ± 0.002 , e dell'*esponente di decadimento* esponenziale, pari a $19.9 \cdot 10^{-3} \pm 0.3 \cdot 10^{-3}$, vicini a quanto misurato per l'S&P 500, *coefficiente di correlazione* 0.179 ± 0.003 , *esponente di decadimento* $10.7 \cdot 10^{-3} \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$.

9. Dipendenza dalla dinamica

In questa sezione si studia come la scelta dell'algoritmo dinamico²⁸ incida sui risultati²⁹ prodotti dal modello di spin di S. Bornholdt³⁰.

Fissiamo i parametri delle simulazioni:

- reticolo di spin 50x50;
- reticolo iniziale scelto casualmente;
- schema di aggiornamento casuale;
- 25'000 *Montecarlo Steps* prima delle misure;
- 200'000 *Montecarlo Steps* di misurazioni;
- $J=1, \alpha=0$;
- $T=1.269, \gamma=8$;
- $w(t)=0$, ovvero nessuna componente *Random Walk*.

Non viene considerato il contributo della componente *Random Walk* poiché desideriamo mettere in evidenza le differenze di comportamento del solo modello di spin.

Le convenzioni e le procedure che seguiremo per le analisi sono quelle già viste nel corso dei precedenti capitoli e verranno, per comodità, brevemente richiamate.

²⁸ Gli algoritmi che utilizzeremo, ovvero la dinamica di *bagno termico*, la catena dinamica di Glauber e la catena dinamica di Metropolis, sono descritti al paragrafo 5.1.

²⁹ Consideriamo solo le grandezze d'interesse finanziario, cioè quelle che derivano dai *rendimenti* $r(t)$ calcolati tramite la differenza della magnetizzazione istantanea per spin $m(t)-m(t-1)$, v. capitolo 4.

³⁰ Ricordiamo che tale modello di spin, descritto al paragrafo 4.3, è caratterizzato dal campo

$$h_k = J \sum_{j \in \langle k \rangle} s_j - 2 \frac{\gamma}{N} s_k \left| \sum_{i \neq k} s_i \right|$$

il quale comporta, ad ogni spin flip, una differenza di energia pari a $-h_k \Delta s_i$.

9.1. Dinamica di bagno termico

I *rendimenti*³¹ che risultano dalla simulazione tramite l'algoritmo dinamico di *bagno termico* sono caratterizzati dalla statistica

Camp.	Media	Dev. St.	Asimmetria	Curtosi	Picco Densità
199'999	$3.83 \cdot 10^{-7} \pm 21 \cdot 10^{-6}$	$9.65 \cdot 10^{-3} \pm 15 \cdot 10^{-6}$	0.017 ± 0.0055	4.84 ± 0.011	52.0

evidenziando una distribuzione simmetrica e leptocurtica. Interpolando tramite una curva di Gauss la densità di distribuzione³², si misura un *errore standard*³³ pari a 3.79 (7.3% rispetto al picco della densità di distribuzione). La misura dell'*esponente di stabilità*³⁴ $\alpha = 1.276 \pm 0.008$ permette quindi di determinare la curva di Lévy³⁵ che meglio si adatta alla densità di distribuzione, conseguendo un *errore standard* pari a 0.692 (1.3% rispetto al picco della densità di distribuzione).

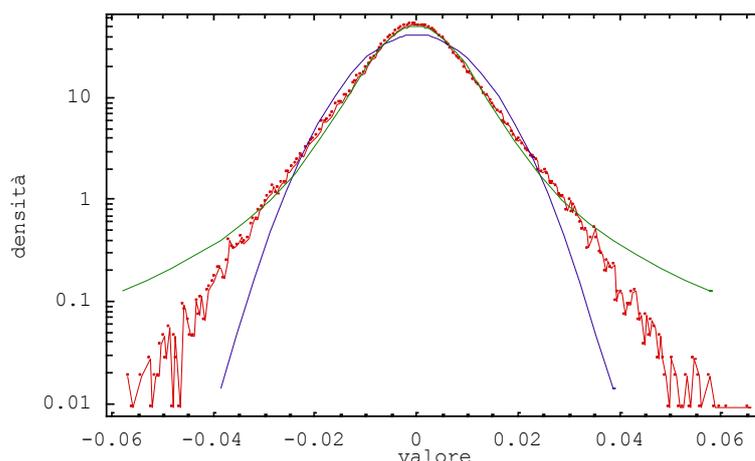


Figura 9-1: bagno termico. Analisi della distribuzione dei *rendimenti* (in rosso) verso un fitting normale in blu (è disegnato l'intervallo $\pm 4\sigma$) e verso un fitting "di Lévy" in verde (è disegnato l'intervallo $\pm 7\sigma$).

³¹ Il *rendimento* $r(t)$ è pari all'incremento della magnetizzazione istantanea per spin $m(t) - m(t-1)$.

³² La curva di Gauss, o normale, è determinata direttamente tramite la media e la varianza dei dati sperimentali.

³³ L'*errore standard* è la radice quadrata della media degli scarti quadratici tra la curva d'interpolazione ed i dati sperimentali.

³⁴ La misura dell'*esponente di stabilità* deriva da una regressione lineare tra il logaritmo dei massimi della densità di distribuzione dei *rendimenti* di periodo T , $m(t) - m(t-T)$, ed il logaritmo di T , seguendo quanto visto in 2.2.3.

³⁵ La curva di Lévy non è analiticamente esprimibile, v. 2.2.2, rendendo molto lunga l'interpolazione a due parametri. Per questo viene dapprima calcolato l'*esponente di stabilità* ed in seguito interpolato il solo parametro di scala.

Per quanto riguarda l'analisi della *volatilità*³⁶, vediamo che l'F.F.T.³⁷ mette in luce qualitativamente la dominanza di “frequenze infrarosse”, ovvero di componenti cicliche di lungo periodo. Misuriamo quindi il *coefficiente di autocorrelazione*³⁸ della *volatilità*³⁹, ottenendo 0.169 ± 0.002 , e l'*esponente di decadimento*, pari a $20.0 \cdot 10^{-3} \pm 0.3 \cdot 10^{-3}$.

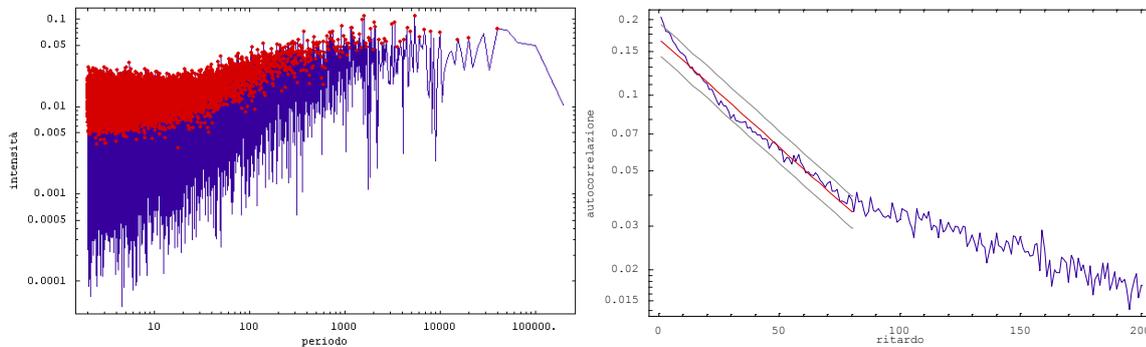


Figura 9-2: bagno termico. F.F.T. della *volatilità* a sinistra; a destra, *autocorrelazione* della *volatilità* (in blu) e regressione lineare dei logaritmi (in rosso) accompagnata da bande di confidenza distanti due volte l'errore standard.

9.2. Dinamica di Glauber

Riportiamo, in forma sintetica, i risultati delle stesse analisi viste al paragrafo precedente applicate a quanto conseguito tramite la dinamica di Glauber.

Statistica dei rendimenti

Camp.	Media	Dev. St.	Asimmetria	Curtosi	Picco Densità
199'999	$2.00 \cdot 10^{-7} \pm 22 \cdot 10^{-6}$	$9.92 \cdot 10^{-3} \pm 15 \cdot 10^{-6}$	-0.002 ± 0.0055	4.75 ± 0.011	51.9

Interpolazione della distribuzione dei rendimenti

Esponente di stabilità $\alpha = 1.278 \pm 0.009$, errore quadratico medio per il fitting normale 3.61 (6.9% del picco di densità), errore quadratico medio per il fitting “di Lévy” 0.69 (1.3% del picco di densità).

³⁶ Misuriamo la *volatilità* tramite il valore assoluto dei *rendimenti*, $|m(t) - m(t-1)|$, v.2.1.4.

³⁷ Si riporta l'intensità della Fast Fourier Transform della *volatilità*.

³⁸ Data una serie storica $v(t)$, l'*autocorrelazione* di ritardo L è la correlazione lineare tra $v(t)$ e $v(t-L)$, v. 2.3.

³⁹ Il coefficiente di *autocorrelazione* e l'*esponente di decadimento* della *volatilità* sono calcolati tramite una regressione lineare del logaritmo dell'*autocorrelazione* di ritardo L verso il ritardo L stesso, secondo quanto visto in 2.3.

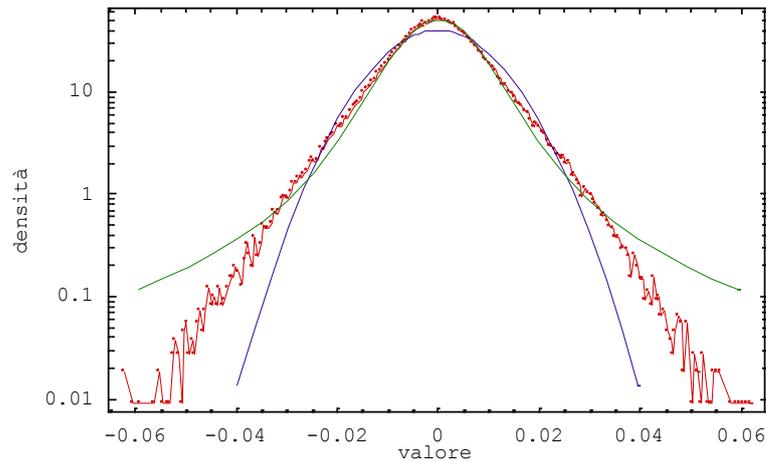


Figura 9-3: Glauber. Analisi della distribuzione dei *rendimenti* (in rosso) verso un fitting normale in blu (è disegnato l'intervallo $\pm 4\sigma$) e verso un fitting “di Lévy” in verde (è disegnato l'intervallo $\pm 7\sigma$). La scala delle ordinate è logaritmica.

Analisi della volatilità

L’F.F.T. evidenzia componenti “infrarosse” dominanti; il *coefficiente di autocorrelazione* è 0.164 ± 0.003 e l’*esponente di decadimento* è $20.0 \cdot 10^{-3} \pm 0.4 \cdot 10^{-3}$.

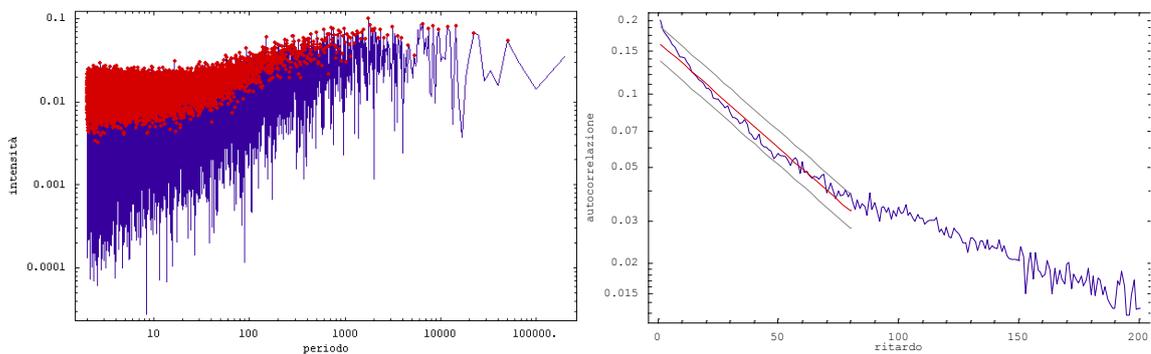


Figura 9-4: Glauber. F.F.T. della *volatilità* a sinistra; a destra, *autocorrelazione* della *volatilità* (in blu) e regressione lineare dei logaritmi (in rosso) accompagnata da bande di confidenza distanti due volte l’errore standard.

9.3. Dinamica di Metropolis

Concludiamo con l’analisi dei risultati conseguiti tramite la dinamica di Metropolis.

Statistica dei rendimenti

Camp.	Media	Dev. St.	Asimmetria	Curtosi	Picco Densità
199’999	$4.19 \cdot 10^{-7} \pm 24 \cdot 10^{-6}$	$10.7 \cdot 10^{-3} \pm 17 \cdot 10^{-6}$	0.004 ± 0.0055	4.38 ± 0.011	44.5

Interpolazione della distribuzione dei rendimenti

Esponente di stabilità $\alpha=1.279 \pm 0.010$, errore quadratico medio per il fitting normale 2.44 (5.4% del picco di densità), errore quadratico medio per il fitting “di Lévy” 1.96 (4.4% del picco di densità).

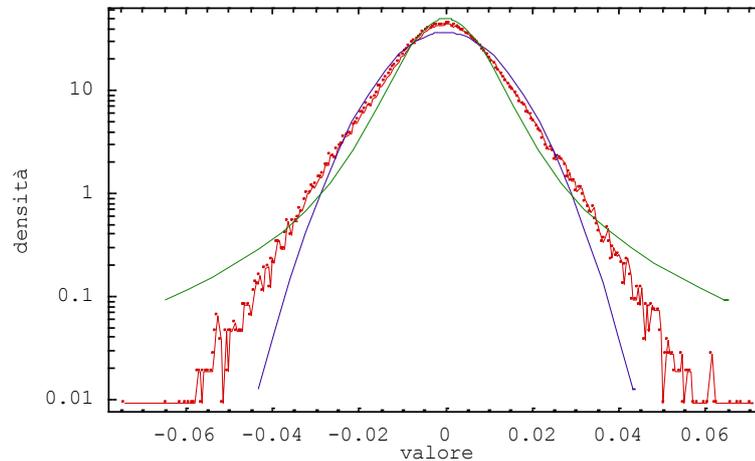


Figura 9-5: Metropolis. Analisi della distribuzione dei *rendimenti* (in rosso) verso un fitting normale in blu (è disegnato l’intervallo $\pm 4\sigma$) e verso un fitting “di Lévy” in verde (è disegnato l’intervallo $\pm 7\sigma$). La scala delle ordinate è logaritmica.

Analisi della volatilità

L’F.F.T. evidenzia componenti “infrarosse” dominanti; il *coefficiente di autocorrelazione* è 0.119 ± 0.003 e l’*esponente di decadimento* è $23.9 \cdot 10^{-3} \pm 0.4 \cdot 10^{-3}$.

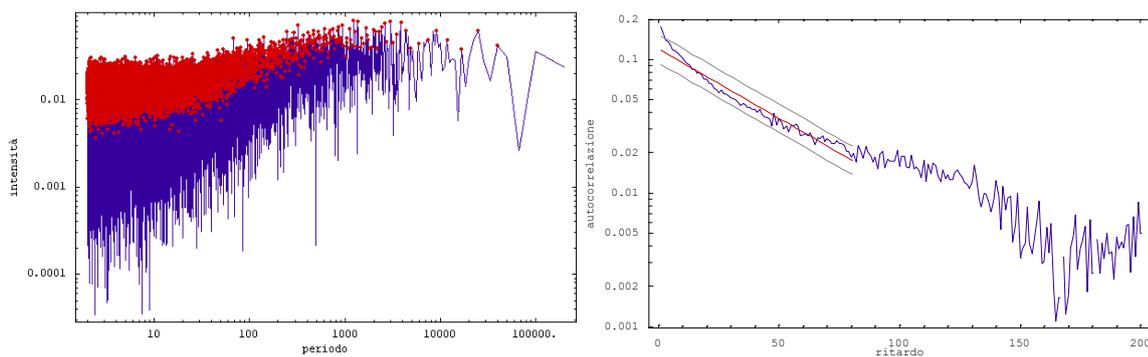


Figura 9-6 Metropolis. F.F.T. della *volatilità* a sinistra; a destra, *autocorrelazione* della *volatilità* (in blu) e regressione lineare dei logaritmi (in rosso) accompagnata da bande di confidenza distanti due volte l’errore standard.

10. Conclusioni

Abbiamo approfondito il lavoro di S. Bornholdt, T. Kaizoji e Y. Fujiwara, ‘*Dynamics of price and trading volume in a spin model of stock markets with heterogeneous agents*’, pubblicato nel 2002 in *Physica A* [9], nel quale viene definito un modello finanziario in grado di riprodurre l’andamento tipico delle serie storiche dei prezzi.

La prima cosa che colpisce leggendo l’articolo è il tentativo di mimare le strutture ed i meccanismi di un mercato finanziario: i diversi tipi d’investitori, le relazioni che li legano, il processo di formazione dei prezzi. L’approccio è radicalmente diverso da quello tradizionalmente utilizzato dagli “addetti ai lavori”, di tipo descrittivo ed empirico. Si tratta, per usare un parallelismo, della stessa differenza di concetto che corre tra la termodinamica e la meccanica statistica.

L’ulteriore punto d’interesse è il ricorso ad un modello di spin per simulare il comportamento degli operatori finanziari interagenti (*interactive traders*), confermando la tendenza ormai consolidata da quasi un decennio che vede i metodi della fisica utilizzati nello studio di sistemi complessi non tradizionali, quali sono i mercati finanziari.

Tale applicazione “interdisciplinare” nell’ambito finanziario, chiamata *econofisica*, non ha raggiunto comunque la maturità, non essendo per esempio ancora sviluppato un modello dinamico di mercato universalmente riconosciuto, anche se i risultati sono incoraggianti, offrendo una valida, e spesso vantaggiosa, alternativa ai metodi statistici tradizionali. In quest’ottica, abbiamo voluto riprendere, approfondendoli, alcuni temi lasciati aperti nei lavori di S. Bornholdt.

Il primo passo è stato quello d’introdurre il modello di spin come punto d’arrivo naturale di un percorso che parte dall’analisi del *modello di Ising* tradizionale (cap. 6), passando per una formulazione Hamiltoniana (cap. 7) e concludendosi con l’introduzione dell’interazione *dissipativa* di S. Bornholdt (cap. 8). Si è constatato che né il *modello di Ising*, né la formulazione Hamiltoniana che abbiamo sviluppato in 4.3.2, pur ragionevole e consistente

dal punto di vista finanziario, siano in grado di produrre gli andamenti di prezzo (la magnetizzazione istantanea) richiesti. In particolare abbiamo visto che non è sufficiente un'interazione antiferromagnetica globale, in competizione con l'interazione tra primi vicini, per generare gli andamenti "caotici" ed intermittenti che si possono riscontrare nei mercati finanziari. Basta tuttavia modificare solo nel segno il campo locale antiferromagnetico, facendo in modo che sia sempre opposto non tanto alla magnetizzazione globale quanto allo spin su cui agisce, per destabilizzare il sistema e produrre stati metastabili.

I metodi di studio delle serie storiche sono un altro punto di approfondimento del nostro lavoro. In effetti l'aderenza dei risultati rispetto al sistema reale, il mercato, dipende dalla significatività delle grandezze che si misurano. Per questo abbiamo dedicato il capitolo 2 al tema, descrivendo alcune caratteristiche ritenute il "DNA" delle serie dei prezzi: la distribuzione dei *rendimenti* (par. 2.2.2), la dipendenza dall'orizzonte temporale (legge di scala, posta in relazione con la stabilità della distribuzione, par. 2.2.3), l'*autocorrelazione* della *volatilità* e l'intensità del suo spettro (par. 2.3).

Si sono dunque sviluppati gli strumenti necessari per tali misurazioni, applicandoli allo studio di alcune attività finanziarie e riportando i dettagli relativi ad uno dei più importanti indici di borsa mondiale, l'americano S&P 500 (cap. 3).

Procedendo con l'analisi del modello di S. Bornholdt, abbiamo rilevato la capacità di riprodurre bene i comportamenti empirici, quali la distribuzione dei *rendimenti*, l'*autocorrelazione* della *volatilità*, le componenti *infrarosse* (par. 8.1), anche se non è stato riscontrato il rispetto della legge di scala. In effetti era possibile prevedere questo problema, in quanto la magnetizzazione (il prezzo) di un modello di spin varia in un intervallo limitato e questo viola la stabilità ricercata.

La soluzione è presente nello stesso lavoro di S. Bornholdt, T. Kaizoji e Y. Fujiwara, ma non viene approfondita. Si tratta d'introdurre esplicitamente, oltre all'azione degli operatori interagenti (*interacrive traders*), anche l'intervento degli *investitori fondamentalisti*, i quali prendono le decisioni senza "farsi influenzare" dagli altri operatori.

Il tema è di notevole interesse, in quanto nei mercati operano realmente due grandi classi d'investitori: una prima, gli *interactive traders*, i quali agiscono in dipendenza dal comportamento dei "colleghi", una seconda, gli investitori "fondamentalisti", i quali guardano alle analisi di bilancio, alle grandezze micro e macro economiche, per cercare di determinare il prezzo d'equilibrio, il "valor vero", di una certa attività finanziaria (per liberare il campo da ogni dubbio, ricordiamo che comunque nessuno è in grado di calcolare il "valor vero" di un'attività finanziaria). L'approccio degli *interactive traders* si può simulare, come abbiamo visto, tramite modelli di spin caratterizzati da interazioni locali e globali opportune, mentre l'approccio degli investitori "fondamentalisti" si può ricondurre a modelli di tipo *Random Walk*.

Per rispecchiare l'orizzonte temporale d'intervento degli investitori "fondamentalisti", legato a cadenze trimestrali (la pubblicazione dei bilanci delle aziende), abbiamo filtrato la componente *Random Walk* tramite una media mobile, così da ridurre le frequenze più alte (par. 4.2). In questo modo, siamo riusciti a guadagnare il rispetto della legge di scala (v. par. 8.2 ed in particolare 8.2.2) seguendo un metodo che è coerente con il tentativo di mantenere il significato finanziario del modello.

Abbiamo quindi analizzato sperimentalmente, nel corso dei capitoli 7 ed 8, la dipendenza dei risultati dai due parametri più importanti del sistema, la temperatura e l'intensità dell'interazione *dissipativa*, in modo da semplificare la loro determinazione ai fini di riprodurre il comportamento di un'attività finanziaria specifica. Nel paragrafo 8.3 si è simulato l'indice S&P 500 studiato al capitolo 3, verificando un'ottima corrispondenza.

L'ultimo punto investigato (par. 4.3.4) riguarda l'incidenza della dinamica sul comportamento del modello di spin. Se infatti è vero che gli algoritmi sono equivalenti quando si tratta di simulazioni "all'equilibrio" di grandezze medie, dobbiamo comunque considerare che il nostro interesse si concentra sulle variazioni della magnetizzazione istantanea, e per questo è lecito domandarsi il senso e la criticità della scelta. Facciamo un passo indietro, ricordando che in effetti non stiamo studiando un sistema fisico reale, ma un modello finanziario il quale è stato dotato di un comportamento cinematico in virtù di un parallelismo con un sistema fisico. Ciò comporta che la dinamica è da considerarsi un elemento caratterizzante tanto quanto lo è la scelta delle interazioni.

Bornholdt ha impiegato la dinamica di *bagno termico* senza addurre giustificazioni. Si è comunque verificato che tale opzione è molto frequente nelle applicazioni dei modelli di spin in ambiti “interdisciplinari”, quali le reti neurali, lo studio della formazione delle proteine e della coagulazione del sangue, le scienze sociali e molti altri. La dinamica di *bagno termico* è infatti considerata “naturale” in quanto *termalizza* ogni singolo spin ponendolo a contatto con una *riserva di calore* a temperatura T , “congelando” gli altri elementi e le relative interazioni.

Ciò premesso, abbiamo comunque voluto accertare come cambiassero i risultati confrontando gli algoritmi di *bagno termico*, di Metropolis e di Glauber (cap. 9). Le differenze che abbiamo rilevato sono state minime e tali da non inficiare la natura delle grandezze misurate, permettendoci di escludere come fattore di criticità la scelta della dinamica.

11. Riferimenti

1. Bar-Yam Yaneer, 1997,
Dynamics of Complex Systems,
Massachussets: Addison-Wesley (1997).
2. Bhattacharjee M. Somendra and Khare Avinash, 1995,
Fifty Years of the Exact solution of the Two-dimensional Ising Model by Onsager,
Curr.Sci. 69 (1995) 816-820; Erratum-ibid. 71 (1996) 493.
3. Bornholdt Stefan, 2001,
Expectation bubbles in a spin model of markets: intermittency from frustation across scales,
International Journal of Modern Physics C, Vol. 12, No. 5 (2001) 667-674.
4. Chandler David, 1987,
Introduction to modern statistical mechanics,
New York: Oxford University Press (1987).
5. Fama E.F., 1970,
Efficient capital market: a review of theory and empirical work,
J. Finance 25 (1970) 383.
6. Huang Kerson, 1963,
Statistical Mechanics, Second Edition,
New York: John Wiley & Sons (1987).
7. Isihara A.,1971,
Statistical Physics,
New York and London: Academic Press (1971).

8. Itzykson, 1989,
Statistical Field Theory,
United States: Cambridge University Press (1989).
9. Kaizoji Taisei, Bornholdt Stefan, Fujiwara Yoshi, 2002,
Dynamics of price and trading volume in a spin model of stock markets with heterogeneous agents,
Physica A 316 (2002) 441-452.
10. Krawiecki A., Holyst J. A., Helbing D., 2002,
Volatility clustering and scaling for financial time series due to attractor bubbling,
Physical Review Letters 89, 158701 (2002)
11. Landau L.D., Lifshits E.M., 1976,
Statistical Physics, Third Edition,
Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press (1980)
12. Mandelbrot B.B., 2005,
Fractals and Scaling in Finance,
Springer Verlag (2005)
13. Vangheli Dorina Andru, Ardelean Gheorghe, 2000,
The Ising Like Statistical Models for Studying the Dynamics of the Financial Stock Markets,
preprint cond-mat/0010318 in arxiv.org.
14. Vasconcelos Giovanni L., 2004,
A Guided Walk Down Wall Street: an Introduction to Econophysics,
Braz. J. Phys. 34, 1039-1065 (2004).
15. Yamano Takuya, 2002,
Bornholdt's spin model of a market dynamics in high dimensions,
International Journal of Modern Physics C 13 (2002) No. 1.